

Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost

Autoři: **Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.,**

předseda Společnosti učitelů matematiky. Dlouhodobě se věnuje problematice výchovy učitelů a vzdělávání obecně. Je autorem desítek odborných prací z metodiky matematiky a spoluautorem učebnic matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

RNDr. Hana Lišková,

zástupkyně ředitele Pedagogické školy v Litomyšli, kde vyučuje Metodiku matematických představ. Organizátorka korespondenčních seminářů pro žáky základních škol, spoluautorka učebnic, sbírek úloh a metodických materiálů pro ZŠ.

RNDr. Eva Zelendová,

vedoucí oddělení pro kurikulum všeobecného vzdělávání a garant oboru Matematika a její aplikace v Národním ústavu pro vzdělávání. Má dlouholetou učitelskou praxi, je autorkou či spoluautorkou řady metodických materiálů.

Úvod

Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF) se od svého vzniku systematicky věnuje metodické podpoře pedagogických pracovníků s ohledem na aktuální problémy matematického vzdělávání dětí, žáků a studentů. V roce 2013 JČMF realizovala projekt *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost* určený pro žáky 1. stupně základní školy a děti v předškolním vzdělávání, v roce 2014 navázala projektem *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost*, který je určen žákům prvního i druhého stupně základní školy s přesahem i na střední školy.

Základním mottem obou projektů jsou slova J. A. Komenského, která byla empiricky dokázána švýcarským vývojovým psychologem J. Piagetem: „**Šikovnost rukou se mění v šikovnost myšlení.**“ Operační myšlení žáků lze rozvíjet odkrýváním vztahů mezi věcmi na základě manipulace s nimi, tj. přidáváním, ubíráním, řazením, přemísťováním předmětů atp. Při této činnosti může učitel směřovat žáky:

- k přemýšlení o tom, co dělá
- k projevu jeho vlastní iniciativy
- k odpovědnosti za učiněná rozhodnutí
- k využívání sebekontroly, k vyhledávání a opravě chyb
- k objevování nových poznatků, principů, jevů a souvislostí mezi nimi
- k osvojení nových dovedností.

Významnou roli při těchto činnostech hrají didaktické **pomůcky**, s nimiž žáci manipulují. Nabízí se celá škála možností od zakoupených didaktických her přes improvizované pomůcky, které využívají předměty běžné potřeby, po didaktické materiály, které si učitel vyrobí sám.

Při utváření matematických představ nelze postupovat jen intuitivně a nesystematicky. Videozáznamy, které vznikly v projektu *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost* a které vám nyní předkládáme, pokrývají všechny oblasti Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Videozáznamy jsou pro přehlednost rozčleněny do patnácti oddílů: Přirozená čísla, Zlomky a desetinná čísla, Poměr a úměrnost, Rovnice, nerovnice a výrazy, Trojúhelníky, Pravoúhelníky, n -úhelníky, Kruh a kružnice, Shodnost, Podobnost, Tělesa, Rotační tělesa, Orientace v rovině a prostoru, Kombinatorika, Komplexní aktivity. V každém oddílu jsou zařazeny **aktivity**, které umožní efektivněji rozvíjet matematickou gramotnost žáků.

Třicet vybraných nahrávek může inspirovat učitele v tom, jak rozvíjet představy žáků v oblastech **kvantita** (význam čísel, různé reprezentace čísel, jejich porovnání, operace s čísly, představa velikosti čísel, počítání z paměti a odhady, míra), **prostor a tvar** (orientace v prostoru a čase, rovinné a prostorové útvary, jejich metrické a polohové vlastnosti, konstrukce a zobrazování útvarů, geometrická zobrazení), **změny a vztahy** (závislost, proměnná, základní typy funkcí, rovnice

a nerovnice, ekvivalence, dělitelnost, inkluze, vyjádření vztahů symboly, grafy, tabulkou) a **neurčitost** (sběr dat, analýza dat, prezentace a znázorňování dat, pravděpodobnost a kombinatorika, vyvozování závěrů) i jak rozvíjet vybrané kompetence, které jsou obsaženy v definici matematické gramotnosti: **matematické uvažování, modelování, užívání pomůcek a nástrojů.**

Metodické návody, které jsou ke všem nahrávkám připraveny, mají jednotnou formu. U jednotlivých videosekvencí jsou nejprve představeny didaktické **pomůcky**, které jsou pro rozvoj matematické gramotnosti použity. Poté jsou stručně popsány **aktivity**, které jsou zachyceny ve videosekvenci. Nedílnou součástí popisu aktivity jsou i důležité metodické poznámky.

Poznámka: označení žák je použito ve významu žák/žákyně, označení učitel ve významu učitel/učitelka.

Literatura:

Burjan, V., Burjanová, L.: *Matematické hry*, Pythagoras, Bratislava 1991.

Fuchs, E., Lišková, H., Zelendová, E. (eds.): *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost*, JČMF Praha, 2014.

King, A.: *Co dokážu s matematikou I*, Fragment, Havlíčkův Brod 1999.

Lišková, H.: *Spirolaterály*, *Učitel matematiky* 4, roč. 15, 2007, s. 199–204.

Lišková, H.: Geometrie a aritmetika v jednom, In: Fuchs, E. (ed.) *Sborník konference Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let*, Litomyšl 2013, JČMF 2014, s. 167–169.

Lišková, H.: Práce s papírem u dětí před vstupem do školy a v první třídě, In: Stehlíková, N. (ed.) *Sborník konference Dva dny s didaktikou matematiky 2012*, PedF UK Praha 2012, s. 23–27.

Roubíček, F.: *Dva stříhy*, Matematika pro všechny, <http://www.home.pf.jcu.cz/~math4all/>

Spolupracovníci

Videonahrávky a grafická úprava: Ondřej Kleiner

Manipulantky: Beata Bednářová
Kateřina Serafinová

Pomůcky: VOŠP a SPgŠ Litomyšl a ZŠ Cerekvice nad Loučnou
Veronika Antochová
Hana Benešová
Lukáš Daniš
Eliška Haniková

Projekt byl podpořen MŠMT v rámci Programu na podporu činnosti nestátních neziskových organizací působících v oblasti předškolního, základního a středního vzdělávání v roce 2014.

Vydavatel: Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 2014

Obsah	
Vzdělávání na 1. stupni ZŠ	Vzdělávání na 2. stupni ZŠ
1. Přirozená čísla str. 6 1. Číselné puzzle 2. Abakus 3. Násobilka 4. Domino pro bystré hlavy 5. Bingo	1. Přirozená čísla str. 22 1. Členky 2. Spirolaterály
2. Zlomky str. 8 1. Čokoláda 2. Vějíře	2. Zlomky, desetinná čísla str. 23 1. Zlomky 2. Desetinná čísla
3. Poměr str. 9 1. Pyramidy 2. Experiment	3. Poměr, úměrnost str. 24 1. Trojúhelníkový rastr 2. Barevné špunty
4. Rovnice a nerovnice str. 10 1. Rovnoramenné váhy 2. Jahody	4. Výrazy, rovnice a nerovnice str. 25 1. Hra 2. Odvození vzorce
5. Trojúhelníky str. 11 1. Polydron 2. Modelování trojúhelníků	5. Trojúhelníky str. 26 1. Pythagorejský trojúhelník 2. Obsahy trojúhelníků
6. Pravoúhelníky str. 12 1. Bodový rastr 2. Modelování pravoúhelníků	6. Pravoúhelníky str. 26 1. Hlavalam 2. Continuo
7. n-úhelníky str. 13 1. Blokus 1 2. Blokus 2	7. n-úhelníky str. 27 1. Brčka 2. Lichoběžník 3. Chytrý rastr
8. Kruh, kružnice str. 14 1. Kresby bez kružítka 2. Ciferník	8. Kruh, kružnice str. 29 1. Optický klam 2. Obvod kruhu
9. Shodnost str. 15 1. Mřížka 2. Barevný kód	9. Shodnost str. 29 1. Origami 2. Dva stříhy
10. Podobnost str. 16 1. Obrázky 2. Bodový rastr 3. Šestiúhelníky	10. Podobnost str. 32 1. Trojúhelníky 2. Barevné obdélníky 3. Barevné trojúhelníky
11. Tělesa str. 17 1. Tělesa 2. Domek	11. Tělesa str. 33 1. Průhledná tělesa 2. Červená brčka
12. Rotační tělesa str. 18 1. Vytváření rotačních těles 2. Výběr rotačních těles	12. Rotační tělesa str. 34 1. Koule a její části 2. Promítání
13. Orientace v rovině str. 18 1. Pokrývanka 2. Šachy	13. Orientace v prostoru str. 35 1. Flex 2. Řezy krychle

14. Kombinatorika str. 19 1. Skládanka čtverců 2. Sukýnky	14. Kombinatorika str. 36 1. Síť krychle 2. Pravděpodobnost
15. Komplexní úlohy str. 20 1. Paměť 3D 2. Cestování kostky	15. Komplexní úlohy str. 37 1. Hra SIM 2. Zrcadlení
Přesahy na střední školu str. 39	

Vzdělávání na 1. stupni ZŠ

1. Přirozená čísla

1. stupeň ZŠ

1. Číselné puzzle

Pomůcky

Na jednotlivých dílcích puzzle jsou zapsána čísla od nuly do deseti tak, aby po sestavení řady byla čísla vzestupně uspořádána. Na dalších dílcích je vyznačena kvantita pomocí puntíků tak, aby po sestavení druhé řady byl dílek s odpovídajícím počtem puntíků pod příslušným symbolem/číslem. Rozložení puntíků na dílku puzzle úmyslně neodpovídá jejich rozložení na hrací kostce. Pomůcka může být vyrobena ze dřeva, umělé hmoty, papíru apod.



Aktivita

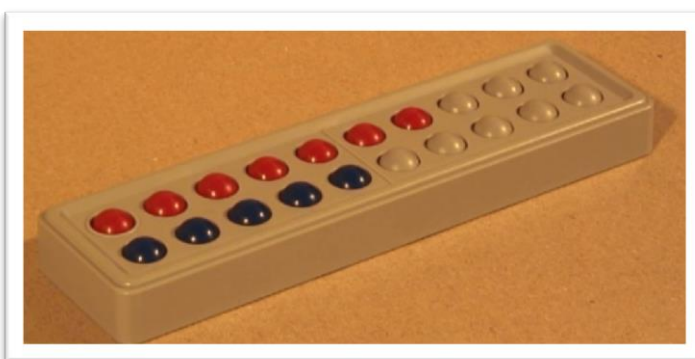
Žák skládá číselnou řadu a sleduje různé konfigurace puntíků. Přiřazuje k sobě dvojice, které vyjadřují stejnou kvantitu: číslo – počet puntíků. Ponecháme žákovi pracovat samostatně a respektujeme jeho způsob řešení zadaného úkolu. Někteří žáci složí nejprve řadu čísel, a potom pod ní skládají řadu s puntíky. Jiní žáci hledají (mnohdy i nahodile) libovolné dvojice vyjadřující stejné

množství a tyto dvojice poté spojují do řady. Žáci pracují metodou ruka – hlava (ruka hledá řešení, hlava kontroluje), využívají své zkušenosti (odhad), nebo skládají řadu metodou pokus – omyl. Při chybě žáka hned neopravujeme, dáme mu čas, aby chybu našel sám, přepočítal puntíky a puzzle opravil. Správné sestavení puzzle je zároveň kontrolou správnosti vytvoření číselné řady.

2. Abakus

Pomůcky

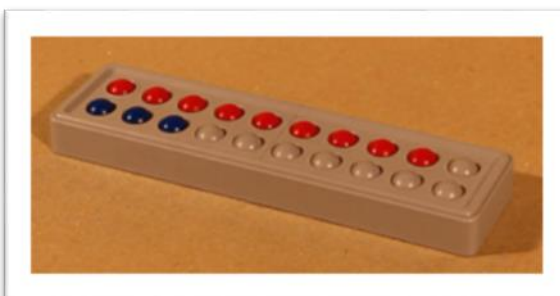
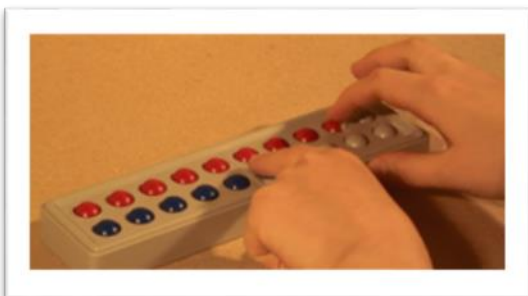
Na plastovém počítadle (jedná se o speciální didaktickou pomůcku SCHUBI abaco 20, www.schubi.com), jsou dvě řady s deseti otočnými kuličkami, které jsou z poloviny šedé a z druhé poloviny obarvené (červeně v první řádce, modře ve druhé řádce). Tento mechanismus slouží k tomu, že žák vidí „jen to, co právě počítá“. Uprostřed destičky je vroubek, který rozděluje kuličky po pěti pro lepší orientaci v řádku.



Aktivita

Objasněme si princip pomůcky na jednoduchém příkladu. Žák má sečíst $7 + 5$. S klasickým počítadlem se stem barevných kuliček má problém, protože se nedovede soustředit jen na ty kuličky, které k výpočtu potřebuje. Na abaku si v první řádce odpočítá a současně červeně nastaví 7 kuliček. Ve druhé řádce si odpočítá a modře nastaví 5 kuliček.

Poté žák oběma rukama manipuluje s kuličkami v obou řádcích. Levou rukou „odbarvuje“ modrou kuličku ve spodním řádku a současně „zabarvuje“ kuličku v horním řádku (tedy nahrazuje „jednu za jednu“). Takto pokračuje do chvíle, kdy je celý horní řádek „zabarven“. Nyní žák může přechíst výsledek 12. Tato manipulace pomáhá pochopit princip sčítání přes desítku. Pro jeho upevnění je třeba, aby žák manipulaci opakoval v dalších příkladech sčítání přes desítku.



3. Násobilka



Pomůcky

Pásky, na kterých jsou zakresleny kruhy v jedné barvě, kartičky s čísly a symboly *krát*, *plus* a *rovná se* (např. 3 pásky s pěti kruhy, 3 kartičky s pětkou, 1 kartička s patnáctkou, 2 kartičky se symbolem *plus*, 2 kartičky se symbolem *rovná se* a 1 kartičku se symbolem *krát*).

Aktivita

Žák modeluje situaci opakovaného sčítání, což umožňuje postupný uvědomělý přechod k násobení.



Pokládá pod sebe pásky s kruhy a zapisuje pomocí symbolů. Když položí první pás, sestaví z kartiček zápis $5 +$ a položí druhý pás. Pokračuje v zápisu $5 + 5 +$ a položí třetí pás. Zápis dokončí: $5 + 5 + 5 = 15$. Pod něj zapíše zkrácený zápis násobení $3 \cdot 5 = 15$. Respektujte, jestliže si žák chce kartičky skládat ve svém pořadí.

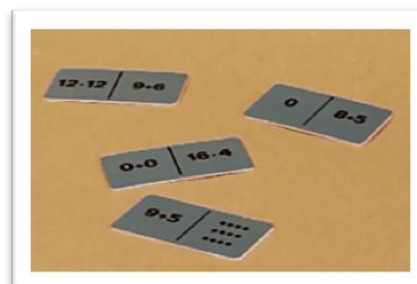
Jestliže složíme pod sebe pět pásků se třemi barevnými kruhy, měl by být žák

schopen zapsat $5 \cdot 3 = 15$. Přepočítáním barevných kruhů žák ověří, že v obou případech dostal shodný výsledek.

4. Domino pro bystré hlavy

Pomůcky

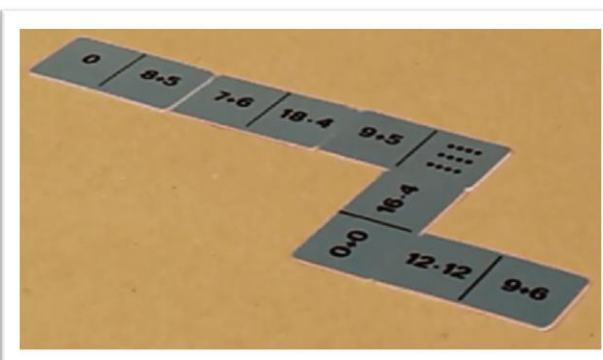
Na kartičkách, které se k sobě přikládají jako v klasické hře Domino, jsou zapsána čísla, číselné výrazy nebo zakresleny různé konfigurace teček. Kartičky musí být připraveny tak, aby jejich počet nebyl příliš velký a zápisy na nich byly voleny vhodně.



Aktivity

Žák sestavuje z kartiček řadu tak, aby kartičky na sebe navazovaly. Počítá naznačené příklady nebo určuje znázorněné množství puntíků (viz obrázek).

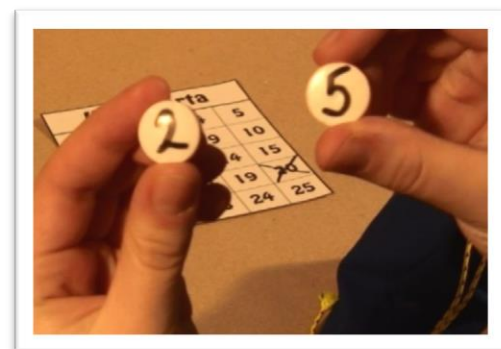
Jestliže žák udělá chybu, neopravujte ho a ponechte mu čas, aby chybu sám objevil. Na chybu žáka upozorní skutečnost, že další kartičky, které může použít, nevyhovují zadání. Žák musí přemýšlet a chybu napravit. Častokrát žáci řeší tuto situaci tím, že musí změnit směr skládání – boříme tak stereotypy, které získali při hraní klasického Domina.



5. Bingo

Pomůcky

Stíratelná kartička s čísly od 1 do 25 a popisovač na bílou tabuli. V losovacím sáčku jsou žetony s čísly od jedné do pěti, každé číslo je v sáčku na několika žetonech.



Aktivity

Žák náhodně vybere ze sáčku dvě čísla např. 2 a 5. Vytvoří z nich příklad tak, aby jeho výsledek mohl zaškrtnout na kartičce (např. $2 + 5 = 7$ nebo $2 \cdot 5 = 10$). Počítá z paměti a vymýšlí alternativy. Využívá i příklady méně obvyklé, např. $5 : 5 = 1$. U žáků hraje roli velká motivace, kdo bude

mít nejdříve vyškrtané všechny možné výsledky. Žáci mohou přijít na to, že některá čísla (např. 17 nebo 23) vyškrtnout nelze.

2. Zlomky

1. stupeň ZŠ

1. Čokoláda



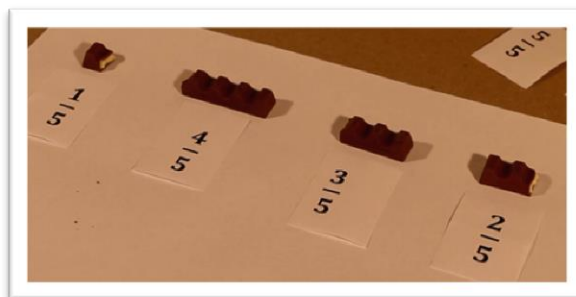
Pomůcky

Malé čokolády se čtyřmi a pěti dílky. Kartičky se zlomky, které mají jmenovatele 4 a 5 a čitatele od 1 do 4, respektive od 1 do 5.

Aktivity

Žák rozbalí čokoládu se čtyřmi dílky a zjistí počet všech dílků. K celé čokoládě přiloží kartičku se zlomkem $4/4$ jako vyjádření celku. Odlomí jeden dílek a přiloží odpovídající zlomky k oběma vzniklým částem ($1/4$ a $3/4$). Podobně pokračuje s novou čokoládou, tentokrát ulomí dva dílky a přiloží zlomky $1/2$, resp. $2/4$ k oběma částem. Při manipulaci si žák uvědomuje význam těchto dvou zápisů.

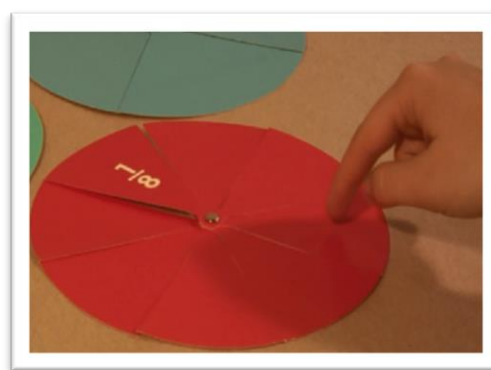
Experiment pokračuje s využitím čokolády s pěti dílky. Žákům můžeme položit otázku: „Ze kterých částí poskládáme celou čokoládu?“



2. Vějíře

Pomůcky

Kruhové vějíře rozdělené např. na dva, čtyři, pět a osm stejných dílů.



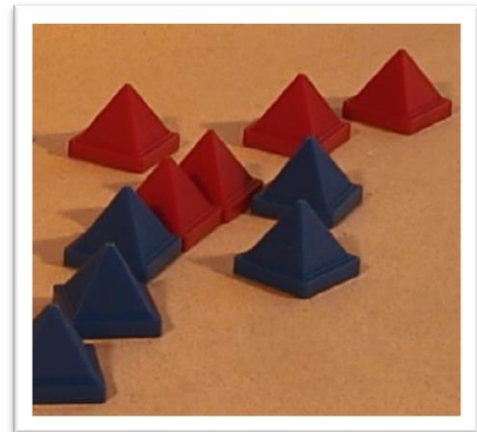
Aktivita

Žák rozkládá vějíř a zjišťuje, že celek vytvoří kruh. Jestliže jeden dílek představuje $1/2$, jsou k vytvoření kruhu potřeba dva dílky. Při $1/4$ jsou potřeba čtyři dílky atd. Na základě zkušenosti ze skládání celku může žák určit, který zlomek je větší. Na základě manipulace dochází k vizualizaci.

3. Poměr

1. stupeň ZŠ

1. Pyramidy



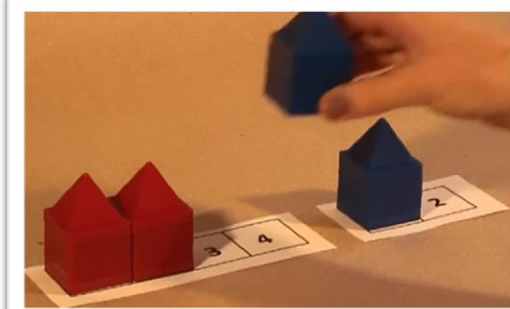
Pomůcky

20 malých pyramid (součást společenské hry Ramses II) nebo žetonů, které se dají stavět na sebe, a tři kartičky. Na první je vyznačeno pouze jedno políčko (označené číslem 1), na druhé dvě políčka (s označením 1, 2) a na třetí čtyři políčka (s označením 1, 2, 3, 4), poslední kartička má pět políček s čísly 1 až 5.

Aktivita

Žák si před sebe položí nejprve kartičku s číslem 1. Začne na sebe do jednoho sloupce skládat všech 20 pyramid, které přemístí na kartičku (s vyznačeným políčkem). Uvědomuje si přitom, že ve sloupceku je všech 20 pyramid. Vezme druhou kartičku se dvěma políčky (s čísly 1 a 2). Rozdělí původní sloupeček na dvě části po deseti pyramidách,

které přemístí na druhou kartičku. Vedeme žáky k tomu, aby si uvědomili, že výška nových sloupečků je poloviční oproti sloupečku původnímu. Na třetí kartičce jsou políčka s čísly 1, 2, 3 a 4. Žák rozdělí každý sloupeček opět na polovinu a přenesení čtyři sloupečky po pěti pyramidách na třetí kartičku. Opět si uvědomuje, že sloupečků je víc, skládají se však z menšího počtu pyramid. Posledním dělením podle čtvrté kartičky dostane pět sloupečků se čtyřmi pyramidami. Dochází k vyvození nepřímé úměrnosti – čím více sloupečků, tím nižší sloupeček (méně pyramid v nich).



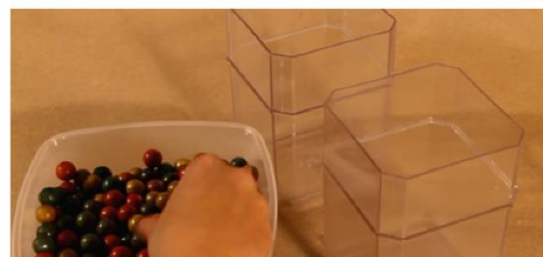
2. Experiment

Pomůcky

Miska se stejným počtem stejně velikých (např. hliněných) kuliček, dvě stejné průhledné nádoby (bez stupnice) a jedna užší průhledná nádoba (bez stupnice).

Aktivita

Žák vkládá postupně do každé ze dvou shodných nádob stejné množství kuliček. Je vhodné, aby při naplňování nádob zachovával zvolené pravidlo (pravá i levá ruka dává současně kuličku do jedné i druhé nádoby, popř. pravidelně střídá pravou a levou nádobu) tak, aby měl jistotu, že v obou nádobách je stejný počet kuliček. Po rozdělení kuliček žák porovnáním zjistí, že výška nasypných kuliček v obou nádobách je stejná. Poté žák přesype kuličky z jedné nádoby do nádoby užší. Kde je víc kuliček? Žák může mylně dojít k závěru, že víc kuliček je v užší nádobě. Sám však kuličky přepočítal a přesypáním se počet nezměnil. Vedeme žáky k poznání, že čím je nádoba užší, tím je sloupec kuliček vyšší. Experiment opakujeme s tekutinou, popř. jiným materiálem tak, aby měl žák prostor pro pochopení zákonitostí a souvislostí (nepřímá úměrnost).



Piageta, kterým se zjišťuje kauzální myšlení dětí, můžete shlédnout na https://www.youtube.com/watch?v=R3U_T6C9NtU.

4. Rovnice a nerovnice

1. stupeň ZŠ

1. Rovnoramenné váhy



Pomůcky

Rovnoramenné váhy, sada závaží, kartičky se zápisy, např.: $100 \text{ g} = 100 \text{ g}$; $100 \text{ g} = 50 \text{ g} + 50 \text{ g}$; $x =$; $100 \text{ g} = 50 \text{ g} + 20 \text{ g} + x$; $10 \text{ g} + 10 \text{ g} + 10 \text{ g}$; 30 g .



Aktivita

Žáci na rovnoramenných váhách postupně modelují podle kartiček předepsané rovnosti $100\text{ g} = 100\text{ g}$ a $100\text{ g} = 50\text{ g} + 50\text{ g}$. Mističky vah jsou v rovnováze, nastává rovnost. Jedno závaží s označením 50 g vyměníme za závaží 20 g, rovnováha se poruší. Závaží, která budeme muset na váhu přidat, zatím reprezentuje složená kartička s označením neznámé x . Žáci na

misku vah přidávají závaží s hodnotou 10 g, dokud se misky nedostanou do rovnováhy – hledají neznámou x . Na závěr se seznámí se zápisem $x = 30\text{ g}$. Jedná se o propedeutiku řešení rovnic, modelování na rovnoramenných váhách vytváří základ pro pochopení rovností.

2. Jahody

Pomůcky

Dostatek kartiček s obrázky jahod.

Aktivita

Žák dramatizuje slovní úlohu *Snědl jsem 8 jahod a pět mi jich zůstalo. Kolik jsem měl původně jahod?*

Žák na lavici položí 8 jahod (to jsou ty, které snědl) a napočítá 5 dalších jahod (ty mu zbyly). Ostatní kartičky s jahodami odloží. Vidí přesně a konkrétně, jak to s jahodami bylo. Celkový počet zjistí sečtením všech jahod na lavici.

Při dramatizaci slovní úlohy si žák uvědomuje popisovanou změnu stavu. Při formálním chápání matematických operací si totiž někteří žáci spojí sloveso *snědl* ze zadání úlohy formálně s odčítáním a zapíše $8 - 5$. V případě nutnosti doprovázíme řešení slovním komentářem: „Napočítej to, co slyšíš. Na lavici odkládej jahody, které jsi snědl. Teď vyrovnej před sebe jahody, které ti zůstaly. Ukaž všechny jahody, které jsi měl na začátku.“

Poznámka: náchylnější na chybné řešení by byla úloha *Snědl jsem pět jahod a zůstalo mi jich osm. Kolik jsem měl původně jahod?* Tady se nabízí výpočet $8 - 5$ ještě silněji.



5. Trojúhelníky

1. stupeň ZŠ

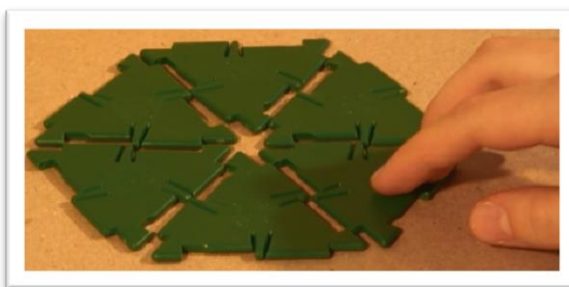
1. Polydron

Pomůcky

Sada stejně velkých různě barevných trojúhelníků. (Lze využít dílky některých stavebnic, např. Polydron, JOVO nebo lze trojúhelníky vyrobit z papíru či plastu.)

Aktivita

Žák skládá z trojúhelníků pás (rovnoběžník), šestiúhelník, hvězdičku nebo lodičku. Při manipulaci s trojúhelníky si uvědomuje základní vlastnosti rovnostranného trojúhelníku, vlastnosti úhlů apod.



2. Modelování trojúhelníků

Pomůcky

Starší dřevěná pomůcka, kterou byla většina škol vybavena – do barevně označených otvorů se zasouvají barevné kolíčky, na které se může napínat různě dlouhá prádlová guma.

Tuto pomůcku lze nahradit pomůckou Geoboard nebo si ji můžete sami vyrobit pomocí dřevěné destičky a špendlíků.



Aktivita

Žák na čtvercové desce s otvory pomocí kolíčků a gumy vytváří podle zadání různé trojúhelníky: pravoúhlé, rovnostranné, se stejnou výškou apod. Při manipulaci probíhá neustálá kontrola počtu vrcholů. Žák pomocí manipulace objevuje, že existuje mnoho různých trojúhelníků a ne jen trojúhelníky rovnostranné a rovnoramenné.

6. Pravoúhelníky

1. stupeň ZŠ

1. Bodový rastr

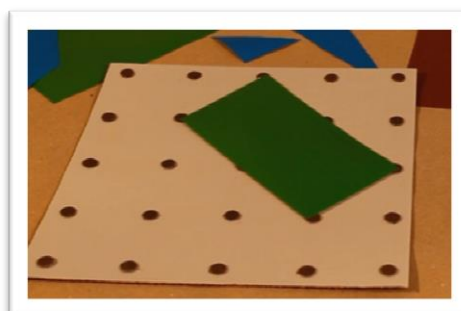


Pomůcky

Bodový rastr (tabulka, na které jsou vyznačeny body, které tvoří čtvercovou síť), vystřižené barevné pravoúhlé trojúhelníky, obdélníky a čtverce, které mají takové rozměry, aby jejich vrcholy mohly ležet v bodech rastru.

Aktivita

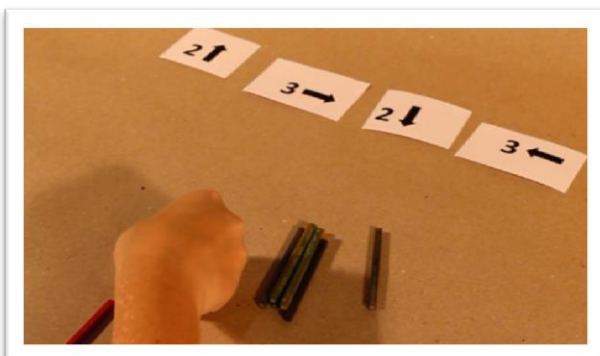
Žák si náhodně vybere útvar (čtverec, obdélník, pravoúhlý trojúhelník) a snaží se ho přiložit k bodovému rastru tak, aby vrcholy pravoúhelníku ležely na vyznačených bodech rastru. Žák se setkává s užitečnou skutečností, že ne vždy musí být strany útvaru rovnoběžné s okrajem bodového rastru. Žák s útvary manipuluje, otáčí je. Ruka hledá, oko kontroluje.



2. Modelování pravoúhelníků

Pomůcky

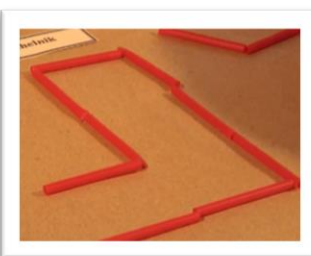
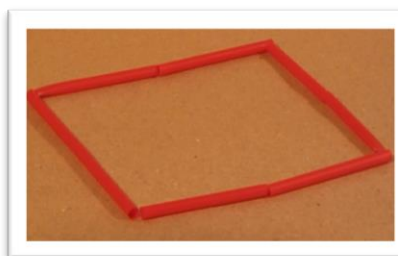
Dřevěné tyčinky, nastříhaná brčka, kartičky s čísly a šipkami pro sestavení plánu.



Aktivita

Žák sestavuje nejprve pravoúhelník podle plánu. Číslo určuje počet dřívěk, šipka směr. Žák odhaduje pravý úhel.

Další modelování pravoúhelníků může probíhat podle předlohy, návodu, diktátu, fantazie nebo popisu. Žák může skládat i pravoúhelníky nekonvexní.



7. n -úhelníky

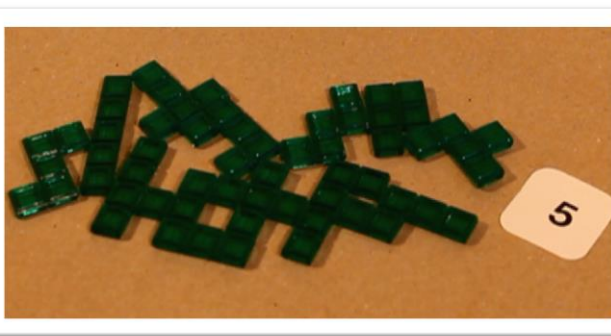
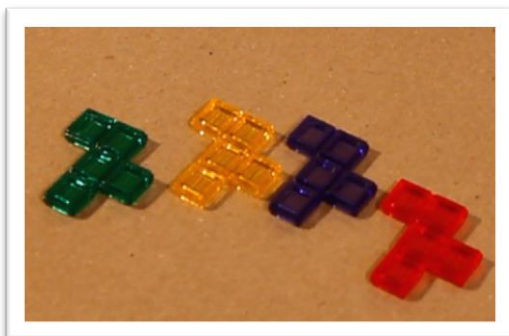
1. stupeň ZŠ

1. Blok 1

Pomůcky

Úkolem hráčů společenské logické hry je umístit na herní plochu co nejvíce „kamenů“ příslušné barvy při dodržení daných pravidel (viz <http://deskovehry.cz/index.php/Blokus>).

Kameny, kterých je 21, se skládají z jednoho až pěti jednotkových čtverečků a představují jejich všechny možné kombinace. Můžeme na ně pohlížet jako na pravoúhlé n -úhelníky.



Aktivita

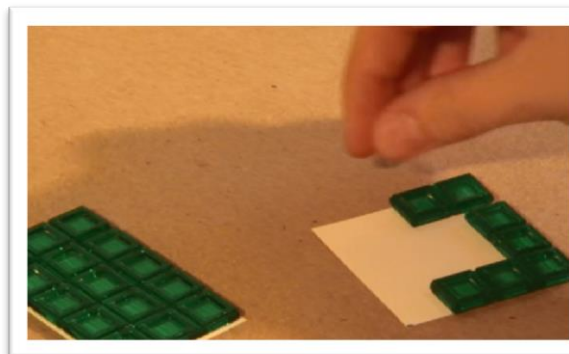
Žák nejprve vybírá ze všech kamenů ty, které jsou shodné. Poté třídí kameny podle obsahu (útvary se stejným počtem čtverečků mají shodný obsah). Respektujeme autentický způsob řešení žáka při určování obsahu (někteří žáci čtverečky přepočítávají, pomáhají si dotykem prstu, některým vystačí vizuální vjem, u některých pozorujeme postupný vývoj).

2. Blok 2**Pomůcky**

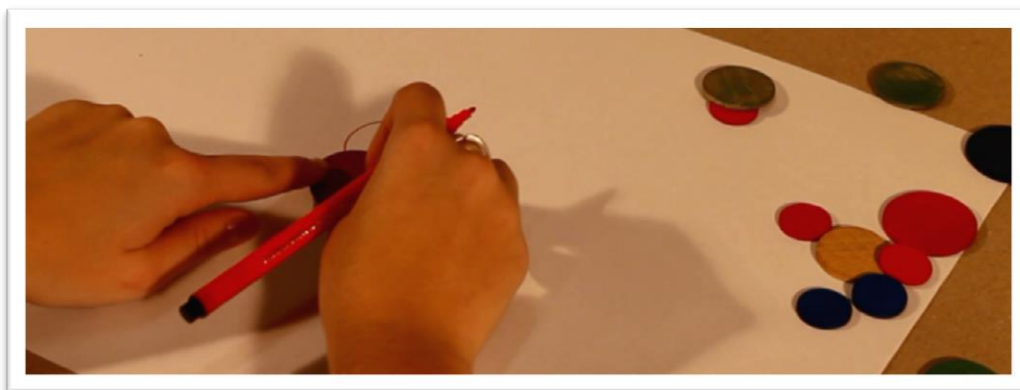
Shodná pomůcka jako v předchozí aktivitě, obdélníkový a čtvercový podklad pro skládání.

Aktivita

Úkolem je sestavit čtverec a obdélník z několika dílků. Aktivita je průpravou pro pokrývání roviny. Žák skládá pomocí 3 kamenů jedné barvy obdélník a ze 4 kamenů čtverec na připravený podklad. Odhaduje, který tvar má použít. Pracuje samostatně, svým tempem. Žáka neopravujeme, necháme ho v klidu pracovat.

**8. Kruh, kružnice****1. stupeň ZŠ****1. Kresby bez kružítko****Pomůcky**

Sada koleček různých průměrů nebo mince, skleničky apod., list papíru, fix.

**Aktivita**

Žák pečlivě obkresluje kolečka a vytváří obrázek sněhuláka, kytičky, šňůry korálků apod. Nepřesnosti tolerujeme, protože žák nerýsuje.

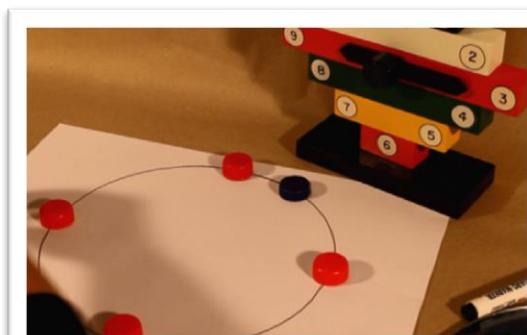
Vedeme žáky k tomu, že ornamenty a kresby lze vytvořit nejen pomocí kružítko. Při rýsování pouze za použití kružítko se u žáků může fixovat chybná představa, že kružnice musí mít střed vždy předem daný nebo dokonce, že střed kružnice je bodem této kružnice.

2. Ciferník**Pomůcky**

Větší poklička, 12 víček od PET lahví a model hodin (ne kulatých, byly by velkou nápovědou).

Aktivita

Žáci tvoří ciferník. Podle pokličky si nakreslí kružnici, na jejíž obvod umísťují víčka tak, aby odpovídala číslům na ciferníku hodin. Pracují s odhadem kolmosti, úhlů, úseků na obvodu kružnice apod. Žáci většinou jako první umísťují víčka na místa odpovídající číslům 3, 6, 9, 12 na ciferníku. Potom musí určit, kolik dalších víček umísťí a kam. Žáci snadno víčka posunují a svůj odhad upravují. V situaci, kdy mají víčka umístěna, zkontrolují, zda lze opravdu všechna čísla ciferníku přiřadit (zda některé číslo nebude chybět). Víčka mohou na závěr označit příslušnými čísly ciferníku.



9. Shodnost

1. stupeň ZŠ

1. Mřížka

Pomůcky

Mřížka 2 x 3, na které jsou položeny obrázky šesti druhů ovoce. Stejné druhy jsou i na velké hrací kostce.

Aktivita

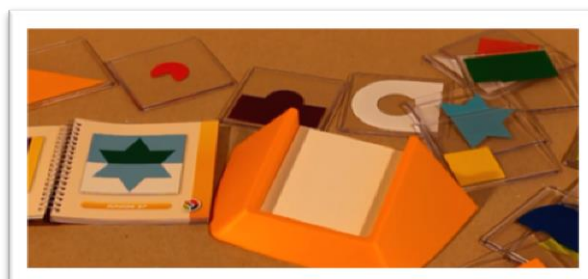
Žák hází kostkou a vyhledává na mřížce shodné tvary. Uvědomuje si, ve kterém sloupci a ve kterém řádku ovoce leží. Později již dovede odpovědět na otázku: Kde najdeš...? Určuje polohu pomocí odpočítání sloupců a řádků, ve kterých leží požadované ovoce. Jedná se o propedeutiku orientace v tabulce a v souřadném systému.



2. Barevný kód

Pomůcky

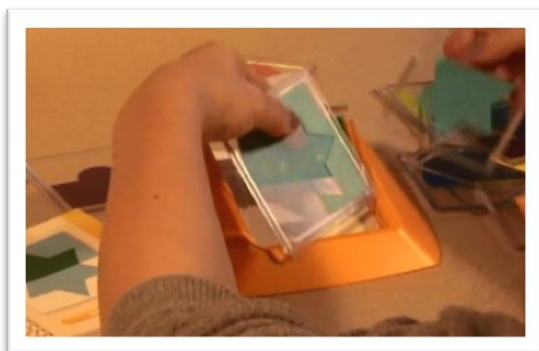
Barevný kód je logická hra pro jednoho hráče. Hra obsahuje celkem 100 úloh, jejichž náročnost se postupně zvyšuje. Pomocí plastových dílků se vytváří obrazec podle předlohy. Jednotlivé dílky jsou čtvercové a jsou na nich vyobrazeny různé grafické motivy. Při řešení úlohy se dílky kladou na sebe. (<http://www.svet-her.cz/spolecenske-hry/barevny-kod/>)



Aktivita

Žák volí předlohu a skládá podle ní. Musí dávat velmi dobrý pozor na pořadí průhledných dílků. Necháme žáky pracovat zvoleným tempem, chyby hned neopravujeme. Žák chybu odhalí a opraví ji

sám podle předlohy, podle níž provádí kontrolu.
Barevný kód je vynikající pomůcka pro rozvoj geometrické představivosti.



10. Podobnost

1. stupeň ZŠ

1. Obrázky



Pomůcky

Sada obrázků, na kterých se postupně zvětšuje vybraný motiv (kuřata, kořata, motýl apod.).

Aktivita

Žák sestavuje řady obrázků, které uspořádává podle

velikosti daného motivu. Žáka neopravujeme, necháme ho, aby chybu našel sám.

Je vhodné, aby žák vybraný motiv dovedl slovně popsat. Při popisu dochází k rozvoji komunikačních dovedností, které jsou nezbytné pro řešení slovních úloh.



2. Bodový rastr

Pomůcky

Bodový rastr (omyvatelná tabulka, na které jsou vyznačeny body, které tvoří čtvercovou síť) ve dvou různých provedeních. Dvě předlohy se zmenšeným rastrem, na nichž jsou zakresleny útvary pomocí spojnic mřížových bodů.

Aktivita

Žák podle předlohy zakresluje úsečky na prvním bodovém rastru. Po ukončení práce provede kontrolu s předlohou. Na druhý rastr kreslí obrazec podle druhé předlohy. Uvědomuje si princip podobnosti.



3. Šestiúhelníky

Pomůcky

Sada rovnostranných trojúhelníků ve dvou velikostech. (Lze využít dílky některých stavebnic, např. Polydron, JOVO nebo lze trojúhelníky vyrobit z tužšího papíru či plastu.)



Aktivita

Žák skládá z jednotlivých shodných rovnostranných trojúhelníků dva pravidelné šestiúhelníky různých velikostí. Při manipulaci si uvědomuje, že k tomu, aby byl šestiúhelník větší, musí být i všechny trojúhelníky, ze kterých se skládá, větší. Žáci odhalí, že vnitřní úhly trojúhelníků v obou šestiúhelnících jsou shodné, takže velikost úhlů se při podobnosti zachovává.

11. Tělesa

1. stupeň ZŠ

1. Tělesa

Pomůcky

Sada těles (válec, kužel, koule, hranol, krychle, jehlan) a sada drátěných modelů těles.

Aktivita

Žák manipuluje s vybraným tělesem, prohlíží si je, otáčí je, porovnává je s odpovídajícím drátěným modelem. Upevňuje si pojmy hrana, vrchol, stěna apod.

Pozor, pro některé děti je obtížné vnímat, že např. drátěná krychle je totéž těleso jako krychle dřevěná. Mnohdy se to považuje za samozřejmé, žáka však tato skutečnost může mást a stereometrie se pro něj stává nesrozumitelnou.



2. Domek



Pomůcky

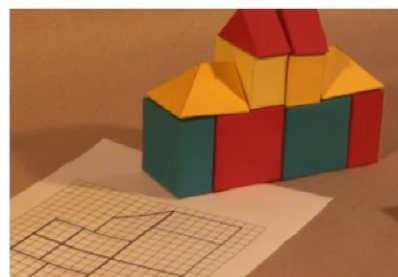
Nárys a půdorys domku a papírová tělesa, ze kterých lze domek sestavit.

Aktivita

Žák podle nárysu skládá domek z připravených těles. Při práci využívá odhad a své

zkušenosti z reálného života. Jestliže žák udělá chybu, neopravujte ho. Při kontrole chybu objeví a sám opraví.

Stavba domku podle půdorysu již vyžaduje větší prostorovou představivost. Někteří žáci staví domek mimo nákres, jiní však potřebují pokládat tělesa přímo na zobrazený půdorys. Nebraňte jim v tom a volbu žáka respektujte.



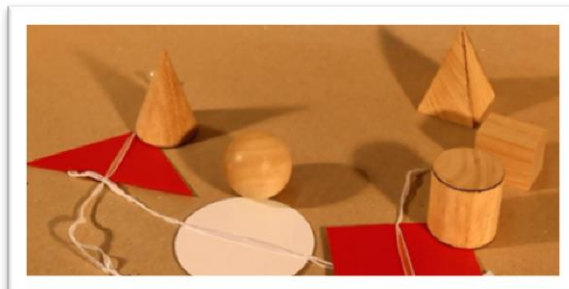
12. Rotační tělesa

1. stupeň ZŠ

1. Vytváření rotačních těles

Pomůcky

Rotační tělesa, papírové útvary (rovnoramenný trojúhelník, čtverec, kruh), které jsou upevněny na tenké stužce nebo provázku tak, že se s nimi může volně v prostoru otáčet.



Aktivita

Žák manipuluje s připravenými útvary tak, aby při rychlém otáčení útvaru kolem stužky (osa rotace) vznikl dojem, že v prostoru je umístěno rotační těleso. Pro navození této představy je třeba jistá zručnost, pohyb útvarů musí být dostatečně rychlý. Během manipulace může učitel žákům klást provokativní otázky: „Objeví se těleso? Jaké těleso to bude? Bude jiné pro kruh a jiné pro trojúhelník?“ Žák po ukončení experimentu s jedním útvarem přiřadí k připravené pomůcce odpovídající rotační těleso. Někteří žáci při experimentu dané těleso velmi brzo „vidí“, někteří musí experiment delší dobu opakovat. Budte trpěliví. Žáci tímto experimentem reálně zjišťují vznik rotačních těles, intuitivně vnímají souvislost mezi osou, řezem tělesa a samotným tělesem.

2. Výběr rotačních těles

Pomůcky

Sada těles, ve které jsou nejen tělesa rotační (válec, kužel, polokoule, koule), ale i krychle a hranoly.



Aktivita

Žák manipuluje s tělesem, otáčí je, zkoumá, sleduje, jak těleso rotuje. Na základě zkušeností se rozhoduje, zda dané těleso je či není rotační. Intuitivně určuje, která tělesa nepatří do skupiny těles rotačních.

13. Orientace v rovině

1. stupeň ZŠ

1. Pokrývanka



Pomůcky

Didaktická pomůcka obsahující mřížku 2 x 3 a šest různých obrázků (např. druhy ovoce – hruška, jablko, švestky, třešně, hrozen vína, jahody).

Pomůcka je stejná jako v aktivitě Mřížka str. 15.

Aktivita

Žák postupně pokládá obrázky podle pokynů (1. řádek – 2. sloupec, 3. sloupec – 2. řádek, 2. řádek – 1. sloupec apod.). V pokynech střídáme pořadí řádek – sloupec, sloupec – řádek. Žák zaplní všechna políčka pokrývky.

2. Šachy

Pomůcky

Šachovnice, na které jsou na okraji označeny řádky a sloupce. Každému políčku šachovnice je tedy přiřazena jedna dvojice písmenko – číslo.



Aktivita

Učitel seznámí žáky s pomůckou. Zopakuje pojmenování figurek, ukáže označení na šachovnici. Žák staví na šachovnici figurky podle zadání (např. kůň E5, dáma C4, věž G2). Figurku a souřadnice může zadávat učitel, mohou však být také zapsány na kartičkách nebo si je mohou žáci zadávat navzájem. S figurkami, které již na šachovnici stojí, mohou žáci dále pohybovat podle pokynů (např. přemístěte koně na G4). Postupně můžeme doplnit pravidla, jak která figurka může po šachovnici putovat (např. kůň do L), které pohyby jsou pro danou figurku nepovolené apod.

14. Kombinatorika

1. stupeň ZŠ

1. Skládání čtverců



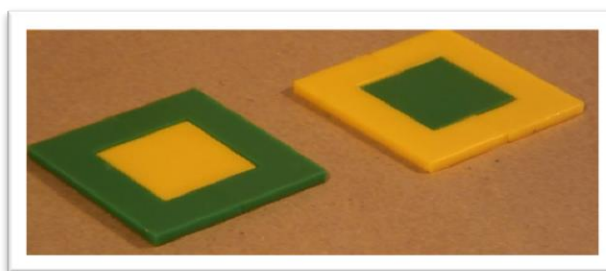
Pomůcky

Pomůcka Skládání čtverců obsahuje sadu barevných čtverců, složených ze středového dílku (tím je kruh, čtverec nebo trojúhelník) a doplňku do čtverce. Dílky lze různě kombinovat.

Aktivita

Žák vyhledává mezi všemi dílky ty, které mu umožní složit čtverec podle pokynů (např. slož zelený čtverec, dvoubarevný čtverec, zelený čtverec ve žlutém čtverci, zelený trojúhelník ve žlutém

čtverci). Žák experimentuje, pracuje s podmínkami. Je vhodné a důležité (např. pro řešení slovních úloh) zadávat nejprve jednu podmínku, pak více podmínek, zařazovat také negativní podmínky (např. neobsahuje zelenou). Žák má šanci si postupně uvědomit, že některé pokyny lze splnit několika způsoby. Snaží se vyhledat všechny možnosti, které pokyn splňují.



2. Sukýnky

Pomůcky

Sada sukýnek ve dvou barvách a triček ve třech barvách, které jsou vystřiženy tak, že dvojice sukýnka – tričko se dají k sobě dobře přiložit.

Aktivita

Sada triček a sukýnek dává možnost kombinovat. Žák experimentálně vyhledává všechny možnosti sestavení dvojice sukýnka – tričko. Učitel sleduje, zda žák pracuje nahodile nebo zda má nějaký systém (např. střídá zelenou a modrou sukýnku a dává k nim tričko ve stejné barvě, nebo nejprve vezme zelené sukýnky a pak k nim přidá různá trička). Respektujeme autenticitu žákovského řešení. Žák si většinou při opakování takového cvičení již volí nějaký systém, i když při prvním setkání s aktivitou řešil úlohu nahodile.



15. Komplexní úlohy

1. stupeň ZŠ

1. Paměť 3D

Pomůcky

55 karet a 5 barevných kostek hry Paměť 3D (viz <http://www.svet-her.cz/spolecenske-hry/pamet-3>).

Aktivita

Žák staví pomocí barevných kostiček stavbu, která je znázorněna na obrázku (v sadě 55 kartiček jsou předlohy různé obtížnosti).

Úlohu můžeme ztížit tím, že si žák obrázek prohlédne, potom kartičku otočí a skládá stavbu z paměti. Na závěr žák provede kontrolu shodnosti své stavby s předlohou.

Poznámka: aktivita rozvíjí prostorovou představivost a paměť, vnímání kvantity a vzájemných vztahů.



2. Cestování kostky

Pomůcky

Tříbarevná kostka, která má protilehlé strany obarveny stejnou barvou, různé plánky cest.

Aktivita

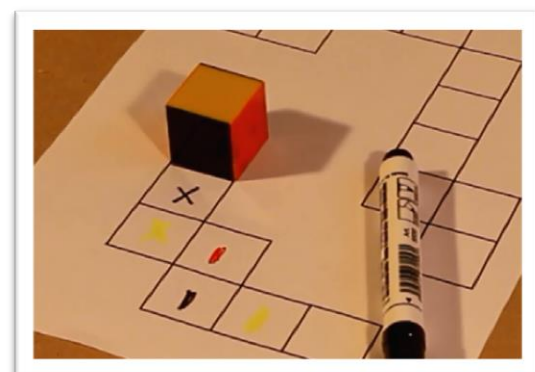
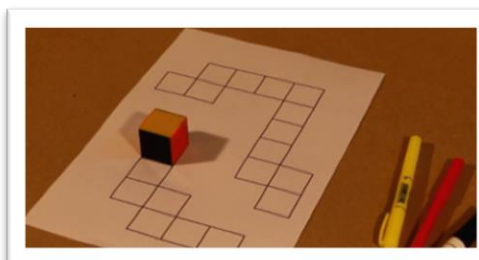
Kostka se převrací a vytváří barevnou stopu (stěna kostky „zabarví“ políčko, na kterém stojí, odpovídající barvou).

Žák převrací kostku po plánu a pozoruje, jak se kostka

„chová“, jakou barvu mají stěny, které se dotýkají plánu cesty. Vráť se na začátek cesty a začne si do plánu značit barvu, kterou by kostka na plánu zanechala.

Žák si při opakování této úlohy časem uvědomí zákonitosti barevných změn. Způsob řešení žákům neurčujeme, pouze je usměrňujeme. Cílem je dokázat předvídat, jakou barvu bude mít políčko, na které se má kostka právě přetočit. Zadání cesty je vhodné volit různě lomené, postupně gradujeme obtížnost.

Poznámka: aktivita rozvíjí prostorovou představivost, vnímání následnosti děje, vnímání rytmu a jeho změny, zákonitosti, souvislosti.

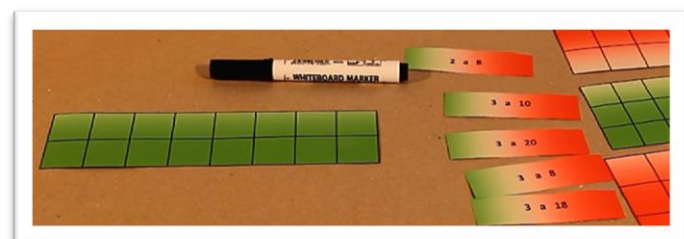


Vzdělávání na 2. stupni ZŠ

1. Přirozená čísla

2. stupeň ZŠ

1. Čelenky



Pomůcky

Nůžky, fix a připravené „čelenky“ – obdélníky rozdělené na čtverečky tak, aby počet čtverců „na výšku“ a počet čtverců „na šířku“ byla čísla soudělná (tzv. povedené čelenky) i čísla nesoudělná (tzv. nepovedené čelenky). Počty čtverečků

jsou uvedeny na kartičkách. Tyto kartičky a čelenky si mohou žáci sami připravit.

Aktivita

Žák vytváří od ruky úhlopříčný vzor, vzniká lomená čára. Pokud se vytvoří vzor, který končí v „rohu“ čelenky, jsou počty čtverců „na výšku“ a čtverců „na šířku“ čísla soudělná (např. 2 a 8). Jestliže vzor nekončí tímto způsobem, jedná se o čísla nesoudělná.



Žák v tomto případě odstříhne část čelenky tak, aby lomená čára již končila v „rohu“ čelenky. Na upravené čelence zjistí čísla soudělná a upraví hodnoty na kartičce.

Při hledání soudělných čísel žák využívá manipulace, grafického znázornění a stříhání. Experimentování žáky motivuje a umožňuje objevovat zákonitosti.

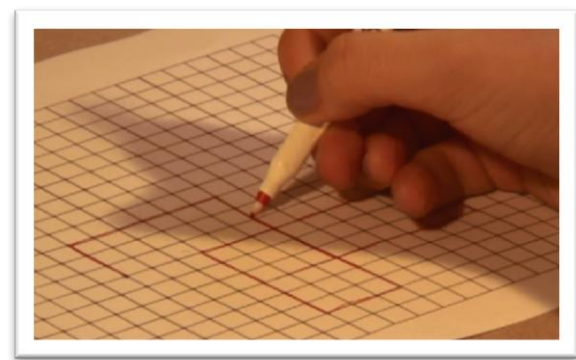
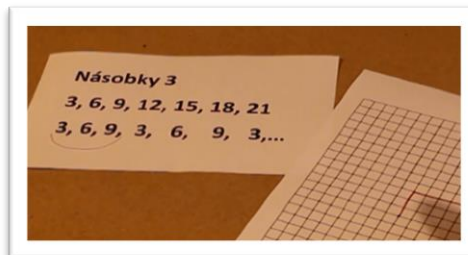
2. Spirolaterály

Pomůcky

Čtverečkovaný rastr (větších rozměrů), fix.

Aktivita

Na úvod si žák zapíše řadu násobků čísla 3. Pod každý násobek si zapíše jeho ciferný součet (viz obrázek). Při kreslení spirolaterálu bude využívána právě řada ciferných



součtů, ve které se pro násobky tří pravidelně opakují čísla 3, 6, 9. Žák tento rytmus objeví a pro kresbu spirolaterálu využije. Zvýrazní si počáteční bod (start) a začne kreslit uprostřed čtverečkovaného rastru, vytváří spirolaterálu. Od ruky vyznačí úsečku o délce 3 čtverečky směrem vzhůru, pokračuje doprava úsečkou o délce 6, stejným směrem „zalomí“ (je nutno dodržovat pravotočivost) úsečku délky 9 a opět pod pravým úhlem „zalomí“ stejným směrem úsečku o délce 3. Při kreslení úseček žák opakuje rytmus 3 – 6 – 9 stále stejným směrem (spirála bude buď

pravotočivá, nebo levotočivá) tak dlouho, až se dostane do výchozího bodu. Vytváření spirolaterálu podporuje vnímání rytmů, shodností, odhalování zákonitostí a dalších vztahů.

Poznámka: pokud má žák problém s orientací, doporučíme otáčet papírem v jednom směru (např. doleva) a kresbu úseček přesně určit (např. „stále k oknu“).

Pro samostatnou práci můžeme žákům zadat vytvoření párové spirály. Ke spirolaterále pro násobky 3 je to spirála pro násobky čísla 6. Zajímá nás, zda žák objeví, že jsou párové spirály „zrcadlově“ převrácené. Podrobnosti o vytváření párových spirolaterál naleznete v článku Spirolaterály, který byl zveřejněn v časopisu *Učitel matematiky* (viz literaturu v úvodu).

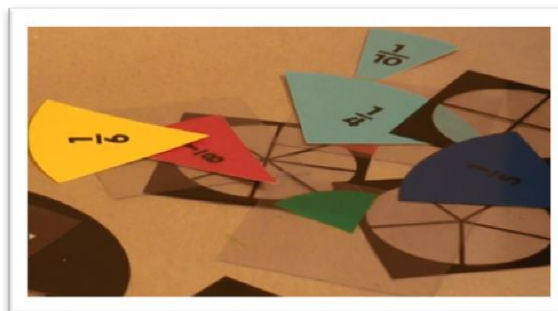
2. Zlomky, desetinná čísla

2. stupeň ZŠ

1. Zlomky

Pomůcky

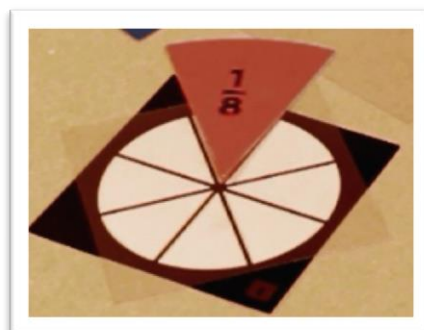
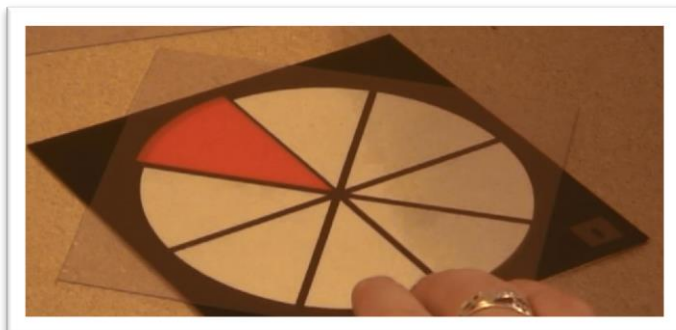
Průsvitné fólie s kruhy, které jsou rozděleny na shodné části (čtyři, šest, osm, deset částí apod.), barevné výseče, které odpovídají jednomu dílku rozdělených kruhů (tedy $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ apod.) a odpovídající barevné výseče s označením příslušného zlomku.



Aktivita

Žák si vybere jeden z kruhů, zjistí počet dílků a odvodí, jaký zlomek představuje jeden dílek. Z barevných výsečí vybere tu, která odpovídá určenému zlomku (nejprve odhadem a poté kontroluje porovnáním – překrytím), nakonec přiřadí zlomek zapsaný na odpovídající výseči.

Činnost žák opakuje s různými kruhy, využívá odhad a metodu pokus – omyl. Dochází k upevňování zápisu části kruhu pomocí zlomku.



2. Desetinná čísla

Pomůcky

Dřevěná desítková soustava – Montessori pomůcka (viz <http://montessorihracky.cz/matematika/866-devna-desitkova-soustava-8596027002285.html>). Skládá se z deseti destiček, které jsou tvořeny stovkou spojených krychliček, z deseti hranolů tvořených desítkou spojených krychliček a ze sta volných krychliček. Součástí pomůcky je i velká krychle, kterou tvoří tisíc spojených krychliček.

Pro aktivity žáků je třeba ještě připravit volné kartičky, na kterých jsou napsána desetinná čísla, která mají maximálně dvě desetinná místa.



Aktivita

Žák pracuje nejprve s jedním hranolem. Uvědomuje si, že celek může rozdělit na deset dílů. Z volných kostiček skládá desetinné číslo, které je vyznačeno na kartičce (např. 0,2; 0,5; 0,7). Jestliže žák modeluje desetinné číslo, které má desetiny i setiny, využívá destičku, kterou lze složit z deseti hranolů. Tvoří ji tedy sto kostiček. Jedna kostička nyní představuje jednu setinu. K modelování čísla 0,75 žák využije 7 hranolů a pět kostiček. Žák svou práci kontroluje a modeluje různá desetinná čísla podle zadání na kartičkách.



3. Poměr

2. stupeň ZŠ

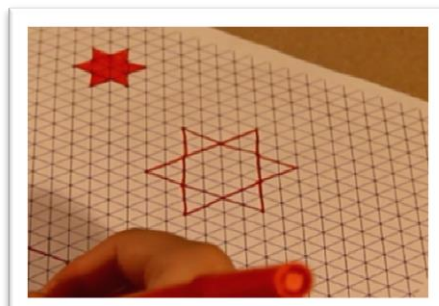
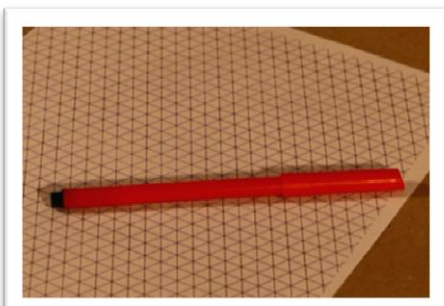
1. Trojúhelníkový rastr

Pomůcky

Arch papíru s trojúhelníkovým rastrem (viz obr.), fix.

Aktivita

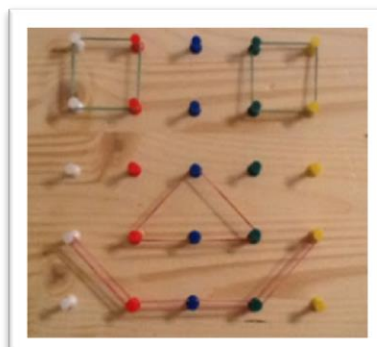
Žák namaluje pomocí trojúhelníkového rastru hvězdičku, která se skládá z pravidelného šestiúhelníku o délce strany 1 a šesti rovnostranných trojúhelníků také se stranou délky 1. Poté zakreslí hvězdičku v poměru 2 : 1 a 3 : 1. Je vhodné po zakreslení obou hvězdic položit žákům otázku: „Kde najdeme poměr 2 : 3?“



2. Barevné špunty

Pomůcky

Starší dřevěná pomůcka, kterou byla většina škol vybavena – do barevně označených otvorů se zasouvají barevné kolíčky, na které se může napínat různě dlouhá prádlová guma. Tuto pomůcku lze nahradit pomůckou Geoboard nebo si ji můžete sami vyrobit pomocí dřevěné destičky a špendlíků. Pomůcku doplníme kartičkami se zadáním poměrů.



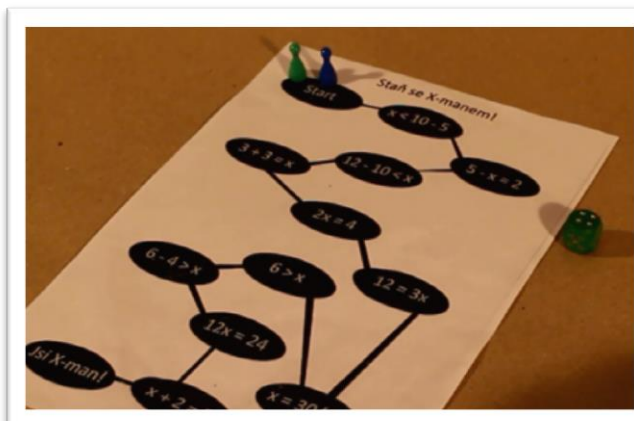
Aktivita

Žák pomocí kolíčku a gumy modeluje čtverce, které jsou podobné, podle zadání na kartičce. Zjišťuje poměr zvětšení nebo zmenšení. Podle zadaného poměru vytvoří žák obdélník, jehož strany jsou v daném poměru. Žák kontroluje svou práci přepočítáváním dílků na odpovídajících stranách.

4. Výrazy, rovnice, nerovnice

2. stupeň ZŠ

1. Hra



Pomůcky

Připravený hrací plán, dvě figurky, tři hrací kostky.

Aktivita

Žák hodí třemi kostkami (pro větší dynamičnost hry). Zjišťuje, zda číslo na některé z kostek splňuje podmínku na nejbližším políčku (např. $x < 10 - 5$). Jestliže ano, postoupí se svou figurkou na vyznačené políčko. Pokračuje spoluhráč, který hraje i v případě, že první žák nemohl na políčko

postoupit. Žáci se při hře střídají, spolupracují, radí si, kontrolují se. Mnoho žáků až při hře pochopí význam matematických zápisů rovnic a nerovnic.

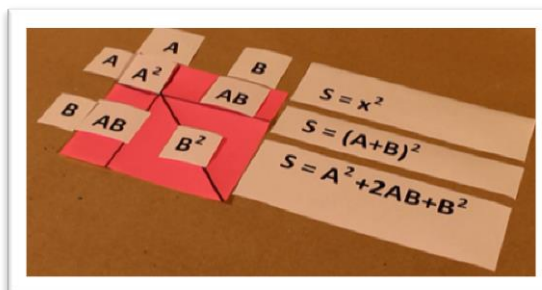
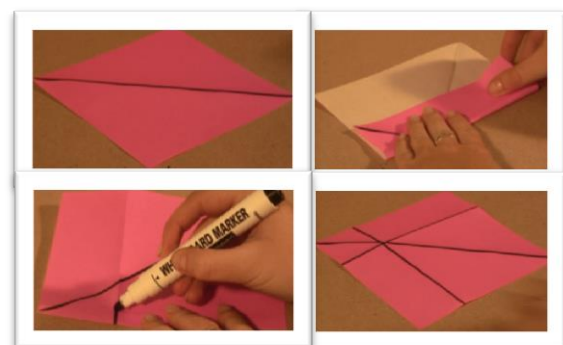
Obtížnost podmínek, které musí hozené číslo splnit, volíme podle úrovně žáků. Zkušenější žáci jsou schopni podmínky navrhovat a sami vytvoří alternativní hrací plán.



2. Odvození vzorce

Pomůcky

Čtverec papíru, fix a kartičky s textem (viz obr.).



Aktivita

Žák samostatně překládá papírový čtverec podle návodu a vyznačuje potřebné úsečky. Důležitou roli zde hraje úhlopříčka, která zajistí shodnost obdélníků. Žák vytváří konkrétní model, ve kterém bude vyhledávat vztahy pro obsah původního

čtverce i obsahy jednotlivých částí. K označení použije připravené kartičky.

Žák objevuje vzorec $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Poznámka: zkušenosti s tímto odvozením vzorce jsou výrazně lepší než při algebraickém odvození vzorce roznásobováním dvojčlenů, kdy mnohým žákům uniká podstata a vnímají vzorec pouze formálně.

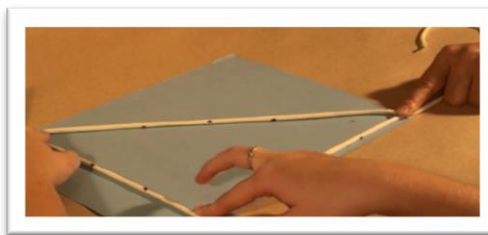
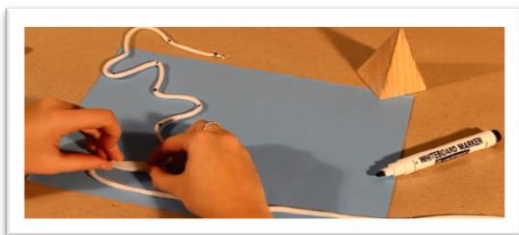
5. Trojúhelníky

2. stupeň ZŠ

1. Pythagorejský trojúhelník

Pomůcky

Provázek, fix.



Aktivita

Žáci ve dvojici vyznačují na provázku 12 dílků. Učitel může položit otázku: „Kolik uzlíků bychom pro rozdělení na 12 dílků potřebovali uvázat?“ Pomocí provázku žáci vytvoří na lavici trojúhelník se stranami o velikosti 3, 4 a 5 dílků. Trojúhelník je pravoúhlý.

Žáci výpočtem ověří, že pro něj platí Pythagorova věta ($5^2 = 4^2 + 3^2$).

Poznámka: doporučujeme žákům vyprávět o tom, že takto vyměřovali pravý uhel již staří Egypťané.

2. Obsahy trojúhelníků

Pomůcky

Starší dřevěná pomůcka, kterou byla většina škol vybavena – do barevně označených otvorů se zasouvají barevné kolíčky, na které se může napínat různě dlouhá prádlová guma (viz pomůcka u aktivity Barevné špunty str. 24), kartička se vztahem pro výpočet obsahu trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v}{2}$.

Aktivita

Žák modeluje různé trojúhelníky se stejnou základnou a výškou. Tedy trojúhelníky, které mají stejný obsah. Využívá zkušenosti s výškou v trojúhelníku a odhad. U tupouhlých trojúhelníků žák zjišťuje, že výška může ležet mimo trojúhelník. Při práci má žák před sebou kartičku se vztahem pro výpočet obsahu trojúhelníku. Utrvuje si zjištění, že jestliže mají dva trojúhelníky stejnou stranu a výšku na tuto stranu, jsou jejich obsahy shodné.

6. Pravoúhelníky

2. stupeň ZŠ

1. Hlavořam



Pomůcky

Několik různobarevných pravoúhelníků (konvexních i nekonvexních), z nichž lze složit obdélník a čtverec.

Žáci si mohou pomůcku vyrobit sami.

Aktivita

Žák má z různých pravoúhelníků složit jeden obdélník a jeden čtverec tak, aby využil všechny dílky. Žák s dílky manipuluje, pracuje rukou, hlava činnost koriguje. Při práci si žák musí uvědomit, že mu žádný dílek nesmí zbýt. Někdy musí složenou část celou „rozbořit“ a začít skládat znovu. Žákům neradíme. Pozorujeme je, vytvoříme prostor na přemýšlení a experimentování.



2. Continuo



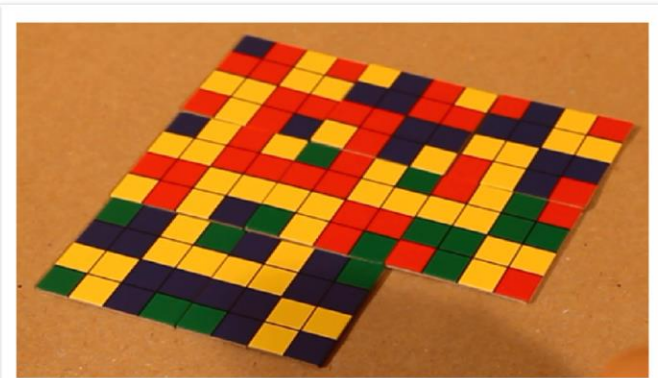
rozdělena na šestnáct čtverečků, které mají buď žlutou, modrou, zelenou nebo červenou barvu a všechny mají předem daný vzor: ve čtyřech rozích je vždy jednobarevný čtvereček, který je „obehnaný“ dokola jednou barvou do tvaru L.

Aktivita

Žák sám nebo ve dvojici skládá barevné kartičky k sobě tak, aby získal co nejvíce bodů za jednobarevné pravoúhelníky („hady“). Žák při skládání vyhledává optimální varianty, snaží se o maximální zisk bodů – při každém přiložení kartičky se započítávají body (vždy počet políček všech jednobarevných „hadů“).

Pomůcky

Společenská hra Continuo (viz např. <http://www.deskovehry.com/s-pribehem/612/recenze-continuo-ctyrbarevni-hadi>, kde si můžete přečíst příběh, kterým byla autorka hry inspirována i pravidla této hry) se hraje se 42 kartonovými čtverečky/kartičkami. Každá kartička je pravidelně



7. n -úhelníky

2. stupeň ZŠ

1. Brčka

Pomůcky

Rozstříhaná brčka a kartičky s nápisy konvexní n -úhelník, nekonvexní n -úhelník.

Aktivita

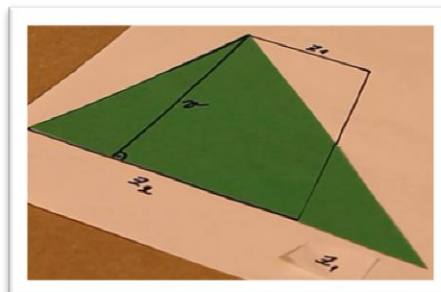
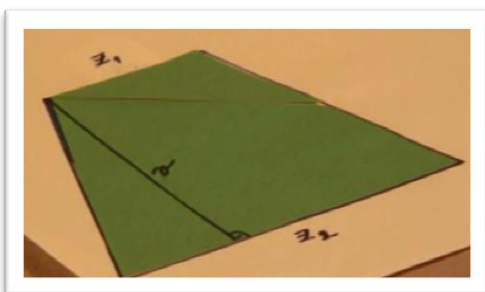
Žák skládá n -úhelníky podle zadání, při manipulaci si uvědomuje podmínky platné pro konvexní a nekonvexní n -úhelník. Při sestavování n -úhelníků využívá odhad velikosti úseček a úhlů.



2. Lichoběžníky

Pomůcky

Barevný lichoběžník, jehož jednu trojúhelníkovou část lze vhodně přesunout (otočením kolem středu boční strany lichoběžníku) tak, že vznikne trojúhelník shodného obsahu. V obrázku jsou vyznačeny dvě základny (z_1 a z_2) a výška v .



Aktivita

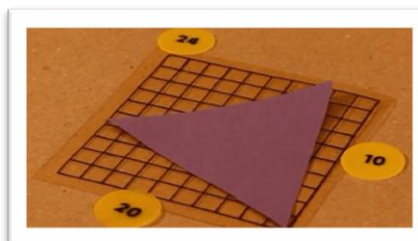
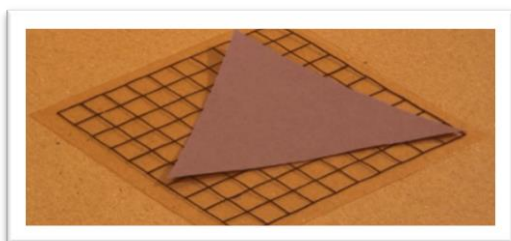
Žák manipuluje s volným trojúhelníkem (využívá rotaci) a přiloží ho jednou stranou k základně z_2 . Vznikne trojúhelník, který má stejný obsah jako původní lichoběžník. Trojúhelník má výšku v a základnu

$z_1 + z_2$. Obsah trojúhelníku mohou žáci vyjádřit:
$$S = \frac{v \cdot (z_1 + z_2)}{2}.$$

3. Chytrý rastr

Pomůcky

Průhledná fólie se čtvercovým rastrem 10 x 10. Útvary z neprůhledného materiálu (trojúhelník, čtverec, šestiúhelník) a žetony s čísly, které reprezentují obsah vhodně zvolených útvarů.



Aktivita

Žáci pomocí „chytrého rastru“ počítají obsah útvarů. Nejprve na rastr položí trojúhelník tak, aby vrcholy trojúhelníku ležely v mřížových bodech rastru. Obsah daného trojúhelníku lze určit tak, že od obsahu celého čtvercového rastru odečteme součty obsahů tří pravoúhlých trojúhelníků, které na rastru vznikly a jejichž obsah umí žáci vypočítat z paměti. Žáci počítají obsahy pravoúhlých trojúhelníků postupně, k jednotlivým trojúhelníkům si pokládají žetony s vyznačenou velikostí obsahu.

Položíme pod „chytrý rastr“ barevně vyznačený čtverec 8 x 8 a na něj položíme šestiúhelník (viz obrázek). Žáci snadno odvodí, že pro určení obsahu šestiúhelníku stačí od obsahu celého barevného čtverce odečíst součet dvou pravoúhlých trojúhelníků, které dohromady tvoří čtverec 4 x 4. Pozorujeme, že někteří žáci odečítají postupně obsahy obou trojúhelníků, někteří „vidí“, že oba trojúhelníky dohromady vytvoří čtverec a usnadní si výpočet. Je vhodné, aby si žáci své vlastní řešení navzájem prezentovali.



8. Kruh, kružnice

2. stupeň ZŠ

1. Optický klam



Pomůcky

Sada barevných koleček z libovolného pevného materiálu (dřevo, kartón).

Aktivita

Žák skládá z koleček známý optický klam.

Kolem dvou stejných středových kruhů skládá v prvním případě malá kolečka a v druhém velká kolečka. Ač jsou středové kruhy shodné, jeví se jako neshodné. Žák shodnost ověří překrytím středových koleček.



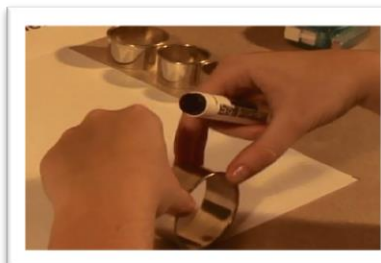
2. Obvod kruhu

Pomůcky

Sada kruhových vykrajovátek různých průměrů, svinovací metr, list papíru, fix.

Aktivita

Žák kotálí vykrajovátka po papíru, označí délku obvodu a zjištěný obvod změří, hodnotu zapíše. Poté změří průměr použitého vykrajovátka a opět zjištěnou hodnotu zapíše. Měření opakuje s dalšími vykrajovátky jiného průměru.



Aktivita vytváří prostor pro vlastní objevení vztahu mezi obvodem kruhu a jeho průměrem (popř. poloměrem). Podporujeme tak neformální konstruktivistické učení.

K výpočtům použije žák kalkulátor. Vydělí „obvod průměrem“ a zapisuje zjištěnou hodnotu aproximace čísla π . Na závěr porovná zjištěnou hodnotu se svými spolužáky.

9. Shodnost

2. stupeň ZŠ

1. Origami

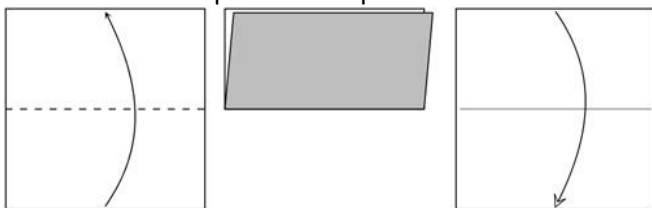
Pomůcky

Šest papírových čtverců stejné velikosti.

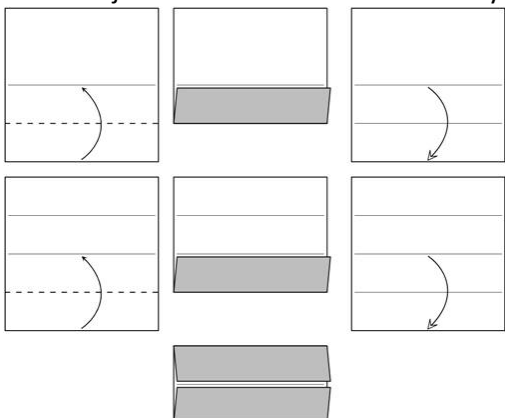
Aktivita

Žák pracuje podle animátora a pomocí videa skládá ze šesti čtverců šest shodných dílů, ze kterých poté složí krychli. Popis postupu je převzat z http://www.zs-mat5.cz/vyuka/model_krychle.php.

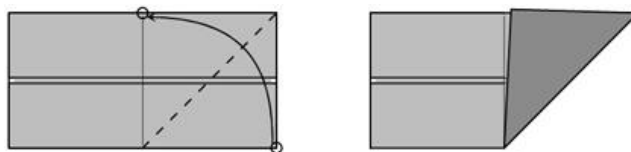
1. Přelož čtverec na polovinu a opět ho rozlož.



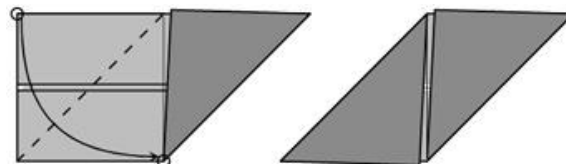
2. Čtverec je rozdělen na dva obdélníky. Každý obdélník rozděl přeložením na poloviny.



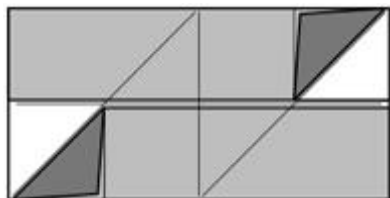
3. Pravý dolní roh obdélníku přelož ke středu horní strany tohoto obdélníku. Vznikne nový obrazec – lichoběžník.



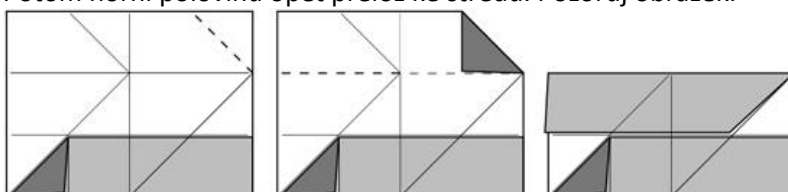
4. Levý horní roh lichoběžníku přelož k pravému dolnímu rohu. Vytvoříš nový obrazec – rovnoběžník.



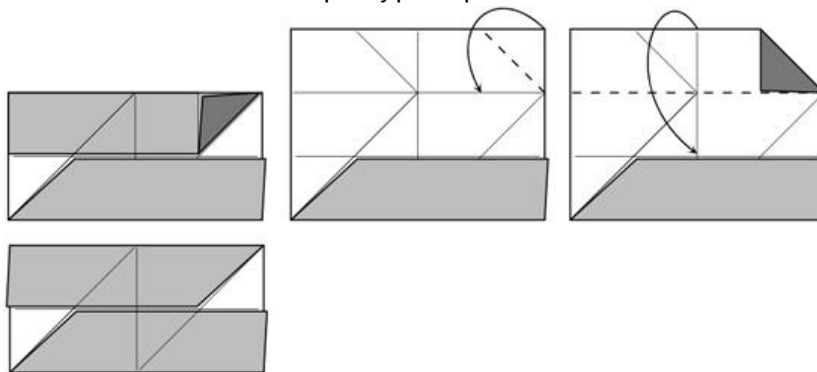
5. Rovnoběžník rozlož zpět na obdélník. Při skládání vznikly dva malé pravoúhlé trojúhelníky. Na obrázku jsou vybarvené nejtmavší barvou.



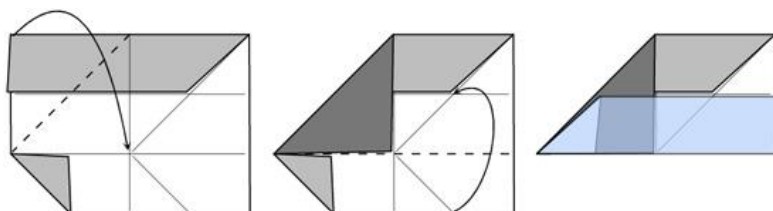
6. Rozlož horní polovinu obdélníku. Pravý horní růžek (malý pravoúhlý trojúhelník) přehni dovnitř. Potom horní polovinu opět přelož ke středu. Pozoruj obrázek.



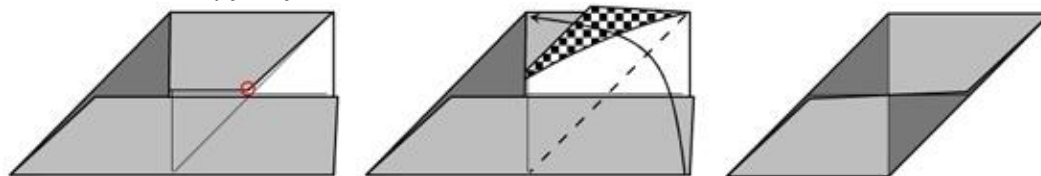
7. Otoč skládanku o 180° a zopakuj postup z bodu 6.



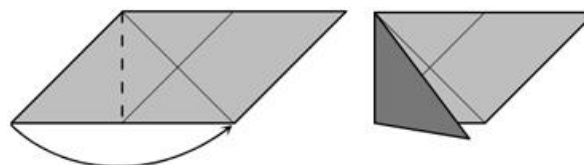
8. Rozlož dolní část obdélníku tak, jak vidíš na obrázku. Přehni pravoúhlý trojúhelník v levé horní části skládanky podle naznačeného přehybu. Dolní část skládanky potom přelož tak, jak naznačuje obrázek. Výsledkem bude pravoúhlý lichoběžník. Menší pravoúhlý lichoběžník (modrý, průhledný) v dolní části se ocitne v horní vrstvě skládanky.



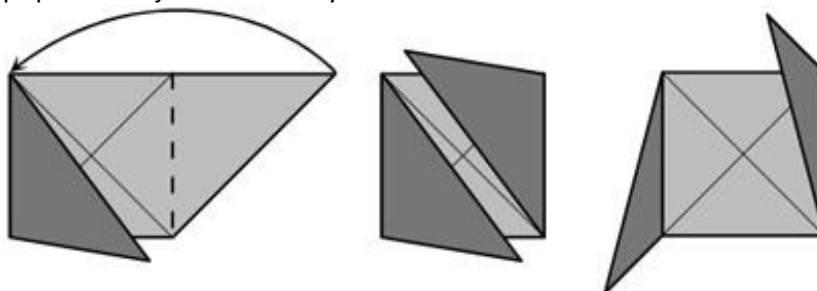
9. Nadzvedni pravý dolní vrchol horního pravoúhlého lichoběžníku (na obrázku je označen červeným kroužkem). Pravý dolní roh skládačky přelož podle naznačeného přehybu a zasuň ho pod nadzvednutou část (pod část, která je na obrázku zvýrazněná černobílou šachovnicí). Vznikl rovnoběžník, který je zajištěn tak, že se nerozkládá.



10. Obrát rovnoběžník na druhou stranu (vidíš jen rovnoběžník; to, jak jsou jednotlivé části zasunuty do sebe, je nyní vespod). Levý dolní roh rovnoběžníku přehni k pravému dolnímu rohu podle obrázku.

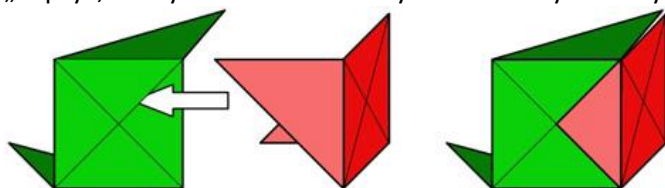


11. Pravý horní roh rovnoběžníku přehni k levému hornímu rohu. Skládačka bude mít tvar čtverce. Přehnuté pravoúhlé trojúhelníky ohni tak, aby svíraly se čtvercem přibližně pravé úhly. Nyní máš připravenou jednu stěnu krychle.

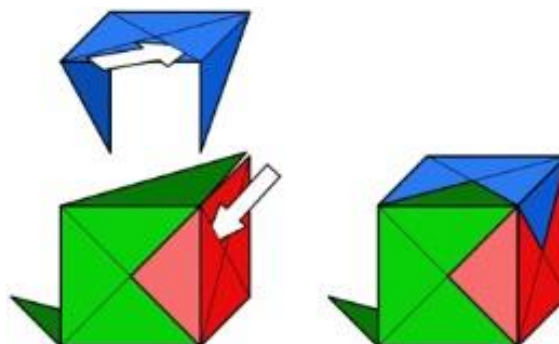


12. Body 2 až 11 zopakuj ještě 5krát. Připravíš si tak další stěny krychle.

Nyní je třeba kostku (krychli) poskládat. Ve čtvercích, které budou tvořit jednotlivé stěny krychle, jsou „kapsy“. Do nich postupně zasunuj trojúhelníky jednotlivých dílů. Každý trojúhelník musíš zasunout do „kapsy“, žádný nesmí zůstat volný. Je to takový malinký hlavolam, ale jistě to zvládneš.



Zasunutí třetí stěny:



2. Dva stříhy

Pomůcky

Přeložený list papíru, nůžky a vzorové útvary (rovnoramenný trojúhelník, rovnostranný trojúhelník, deltoid, rovnoběžník, čtverec).

Aktivita

Žák se snaží pomocí dvou stříhů přes hřbet složeného papíru vytvořit útvar podle předlohy. Při práci využívá osovou souměrnost a odhad velikosti úhlů. Vystříhnutý útvar porovná s předlohou. Tento postup nutí žáka analyzovat rovinné útvary zcela nezvyklým způsobem. Uvědomuje si důležité souvislosti, které musí aktivně zpracovat při řešení dané situace. Je vhodné doplnit aktivitu otázkou, který rovinný útvar takto nelze vystříhnout. Žáci postupně zjistí, že překvapivě nelze vystříhnout obdélník. Vedeme žáky ke zdůvodnění (obdélník není souměrný podle úhlopříčky), které pomůže odhalit, zda žáci dostatečně pochopili osovou souměrnost.



10. Podobnost

2. stupeň ZŠ

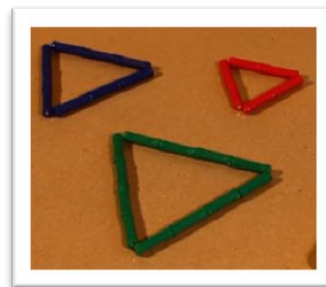
1. Trojúhelníky

Pomůcky

Stavebnice Bornimago nebo rozstříhaná brčka, dřívka.

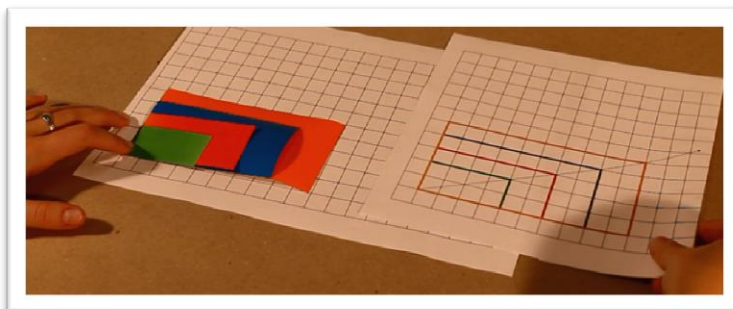
Aktivita

Žák sestavuje pomocí jednotlivých shodných dílků podobné trojúhelníky. Každou stranu červeného trojúhelníku tvoří 2 dílky, každou stranu modrého trojúhelníku tvoří 3 dílky. Modrý trojúhelník je zvětšen v poměru 3 : 2. Žáci se aktivně seznamují s poměrem podobnosti.



Jestliže má žák sestavit zelený trojúhelník zvětšený v poměru 4 : 2, musí mít zelený trojúhelník strany ze 4 dílků.

2. Barevné obdélníky



Pomůcky

Čtvercový rastr a čtyři barevné obdélníky různých rozměrů.

Aktivita

Žák do čtvercového rastru umísťuje jednotlivé obdélníky od nejmenšího po největší tak, aby měly jeden vrchol společný. Pomocí úhlopříčky ověřuje, zda

jsou podobné a kontroluje s nákresem. Úhlopříčka nám pomáhá zajistit podobnost například při kresbách v perspektivě.

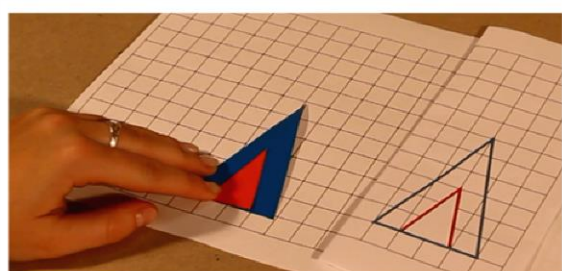
3. Barevné trojúhelníky

Pomůcky

Čtvercový rastr, barevné podobné trojúhelníky a jeden trojúhelník, který s nimi podobný není.

Aktivita

Žák opět do čtvercového rastru umísťuje jednotlivé trojúhelníky od nejmenšího po největší. Pomocí shodnosti úhlů ověřuje, zda jsou podobné. Podobnost se projeví v zachování rovnoběžnosti, tedy zachování úhlů. Pokud trojúhelník není s ostatními podobný, žák ho odloží. Výsledek své práce kontroluje s nákresem.



11. Tělesa

2. stupeň ZŠ

1. Průhledná tělesa

Pomůcky

Průhledná tělesa (trojboký jehlan a trojboký hranol se stejnou základnou a výškou), dostatečné množství červené čočky (popřípadě máku) na přesypání.

Aktivita

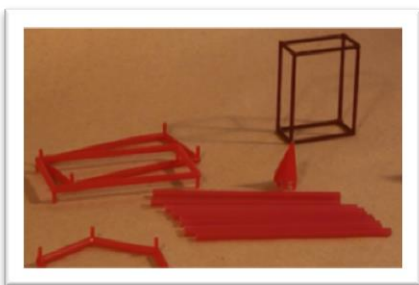
Žák odhaduje a následně pomocí manipulace porovnává objemy těles. Snaží se odpovědět na otázku: „Kolikrát se vejde objem jehlanu do hranolu, jestliže mají tato tělesa shodnou výšku a podstavu?“ Žák pracuje s odpovídajícími tělesy, přesypává „objem“. Nejprve nasype čočku do trojbokého jehlanu, poté ji přesype do hranolu. Zjišťuje, že hranol ještě není



čočkou zaplněn. Žák nasype do jehlanu další čočku a přesype ji opět do hranolu. Ani teď není hranol čočkou zaplněn. Po třetím zopakování uvedeného postupu je hranol zcela zaplněn. Žák experimentálně ověřil, že objem trojbokého hranolu se rovná trojnásobku objemu trojbokého jehlanu se stejnou výškou a podstavou.

Aktivita umožňuje žákům odhalovat popř. ověřovat souvislosti neformálně, ne je pouze pasivně vnímat. Poznámka: práce s drobným sytkým materiálem je pro výuku ve třídě organizačně jednodušší než přelévání vody.

2. Červená brčka

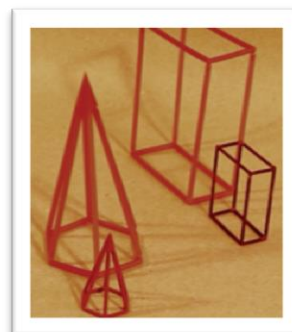


Pomůcky

Stavebnice, která umožňuje sestavovat tělesa podle modelů.

Aktivita

Žák si zvolí jeden z modelů jako předlohu pro svou práci. Vybere si odpovídající dolní podstavu, potřebný počet hran a pomocí „brček“ začne vytvářet zvolené těleso. Práci dokončí pomocí horní podstavy, nebo v případě jehlanu pomocí „vrcholu“. Vytvořené těleso porovná s modelem.



12. Rotační tělesa

2. stupeň ZŠ

1. Koule a její části

Pomůcky

Rozkládací model koule, který je doplněn obrázky nebo fotografiemi, na kterých můžeme části koule nalézt jako části reálných předmětů (kupole hvězdárny, sluneční hodiny, radar, vesmírná sonda, akvárium apod.).

Aktivita

Žáci rozkládají model a uvědomují si, jaké části můžeme na kouli nalézt (kulový vrchlík, polokoule, kulová vrstva...). Pomocí těchto částí vyhledávají reálné objekty, které jsou zachyceny na obrázcích a fotografiích. Žáci s částmi koule manipulují (někteří potřebují mít těleso ve stejné poloze, pak teprve vnímají, že se jedná o totéž těleso), otáčejí je, kontrolují podobnost s předloženým vzorem.



Případné chyby neopravujeme, necháme žáky, aby pracovali svým tempem. Vyzveme žáky, aby našli, popř. vyfotografovali, další reálné předměty daných tvarů.

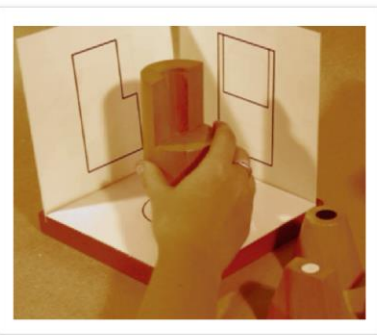
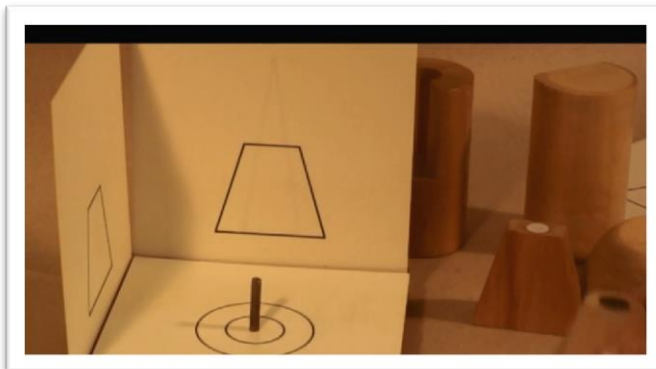
2. Promítání

Pomůcky

Didaktická pomůcka, která seznamuje žáky s promítáním na tři průmětny. K dispozici jsou dřevěná tělesa, která se mohou nad dolní průmětnou otáčet a sada různých půdorysů, nárysů a bokorysů těchto těles.

Aktivita

Žák vyhledává rotační těleso, jehož tři průměty má k dispozici. Odhaduje, které těleso by to mohlo být, otáčí s ním a kontroluje, zda průměty souhlasí. Manipulace žákům při řešení tohoto náročného úkolu velmi pomáhá.



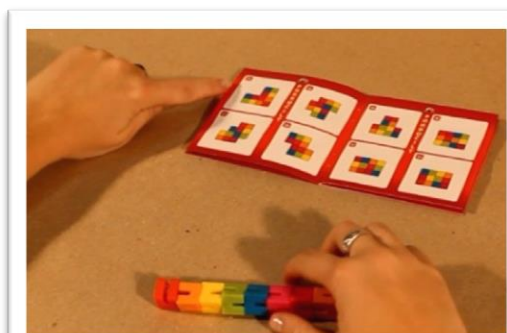
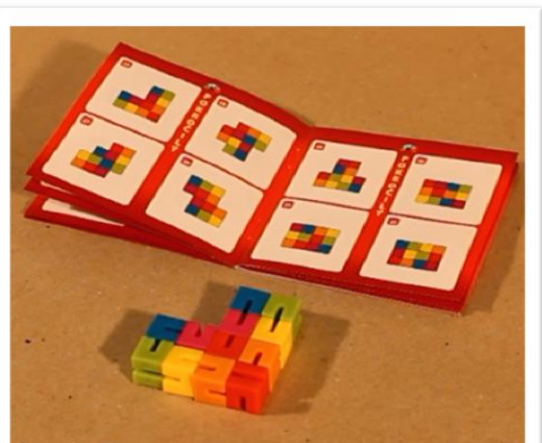
13. Orientace v prostoru

2. stupeň ZŠ

1. Flex

Pomůcky

Víceúrovňová logická hra s 12 barevnými kostkami spojenými do řady, které lze ohýbat a otáčet jimi nejrůznějšími způsoby. Hra obsahuje 100 zadání v různé obtížnosti (viz <http://www.deskove-hry.eu/flex-barevny-hlavolam>).



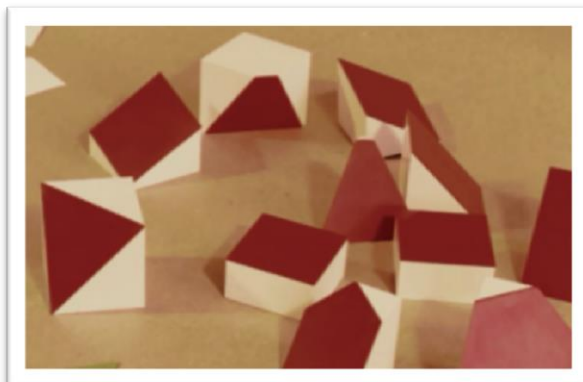
Aktivita

Žák si vybere z nabídky zadání (sám si volí obtížnost), pracuje podle předlohy. Využívá odhad a schopnost prostorového vnímání, z počátku pozorujeme metodu pokus – omyl. Pracuje samostatně a soustředěně. Výsledek kontroluje s předlohou v příložené brožuře. Postupně volí obtížnější předlohy.

2. Řezy krychle

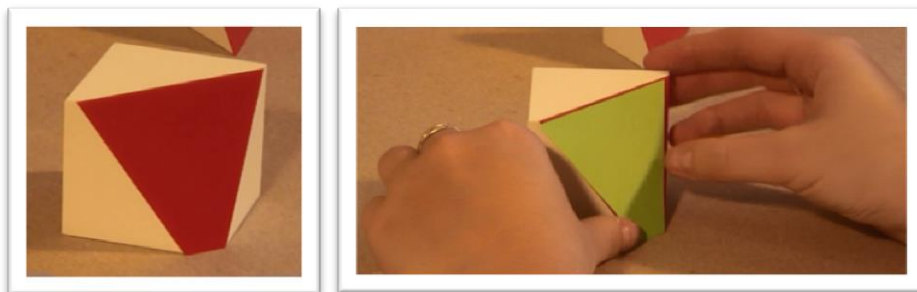
Pomůcky

Sada krychlí, které jsou řezem rozděleny na dvě samostatné části. Z papíru vystřižené útvary, které odpovídají jednotlivým řezům, kartičky s názvy těchto útvarů (obdélník, šestiúhelník, trojúhelník, pětiúhelník, rovnoběžník, čtverec, lichoběžník).

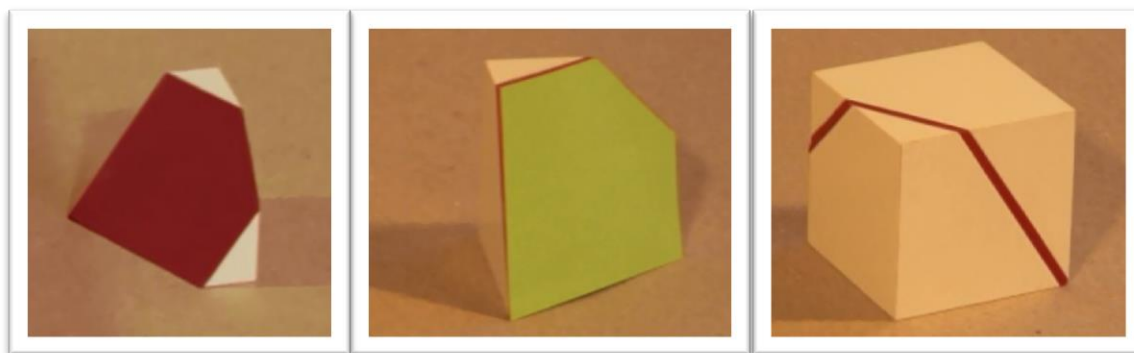


Aktivita

Žák nejprve přiřadí k vystřiženým útvarům kartičky s odpovídajícími názvy. Poté vezme jedno těleso a na řez přiloží odpovídající vystřižený útvar. Pomocí tohoto útvaru hledá mezi ostatními tělesy to, které po přiložení k vybranému tělesu vytvoří krychli.



Žák úlohu řeší manipulací, postupně skládá všechny krychle.



14. Kombinatorika

2. stupeň ZŠ

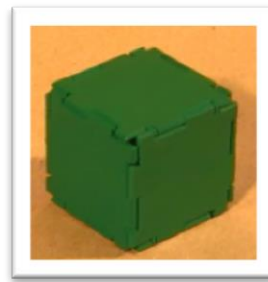
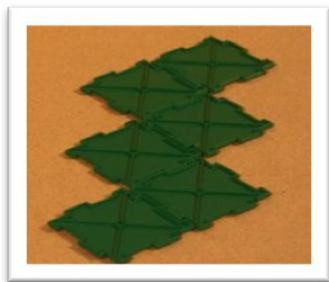
1. Sítě krychle

Pomůcky

12 krychlí sestavených ze šesti čtvercových dílků (např. stavebnice JOVO). Je třeba, aby se krychle daly dobře rozložit do plochy a aby se s jednotlivými čtvercovými díly dalo jednoduše manipulovat.

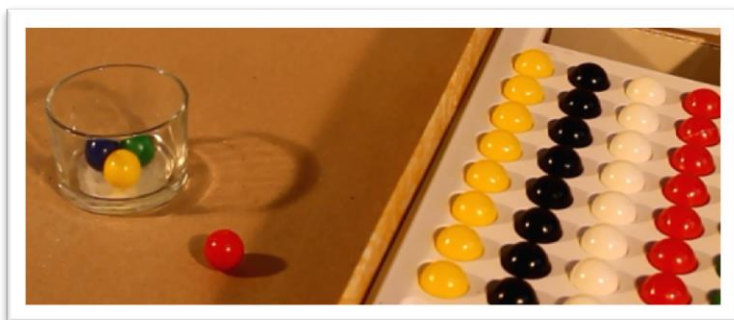
Aktivita

Žák rozloží krychli do roviny. Tím získá síť krychle. Opětovným složením krychle lehce zkontroluje, že se opravdu jedná o síť krychle.



Přesunutím čtverečků v rozloženém útvaru žák zjišťuje další možnosti, jak může být reprezentována síť krychle. Je třeba vždy zkontrolovat, že z nově vytvořeného útvaru krychli lze složit. Žáky upozorníme, že varianty, které jsou po otočení shodné, nepředstavují novou síť. Všechny různé sítě krychle je 11. Doporučujeme sestavené sítě zakreslit na čtverečkovaný papír, aby si mohli žáci lépe kontrolovat, zda nevytvořili síť shodnou. Je užitečné, když žák sestaví také variantu, ze které nelze krychli složit. Někteří žáci jsou velmi překvapeni, že každá varianta krychli nevytvoří. Aktivita efektivně rozvíjí prostorovou představivost a odhad.

2. Pravděpodobnost



Pomůcky

Různobarevné kuličky, sklenička.

Aktivita

Žáci do skleničky postupně dávají určitý počet různobarevných kuliček a odpovídají na otázky týkající se pravděpodobnosti vytažení jedné přesně určené kuličky. Uvedme několik příkladů.

Ve skleničce je 1 zelená a 1 červená

kulička. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneš červenou kuličku?

Ve skleničce je 1 zelená, 1 červená, 1 modrá a 1 žlutá kulička. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneš červenou kuličku?

Ve skleničce je 1 zelená, 1 černá, 1 modrá a 1 žlutá kulička. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneš červenou kuličku?

Ve skleničce je 1 zelená a 3 červené kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneš červenou kuličku?

Ve skleničce jsou 2 červené kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneš červenou kuličku?

Poznámka: aktivita vytváří dostatečný prostor pro intuitivní vnímání pravděpodobnosti, její vyjádření zlomkem a procenty. Žáci mohou sestavovat další jednoduchá zadání a z paměti je řešit. Jedná se o důležitou propedeutiku pravděpodobnosti.

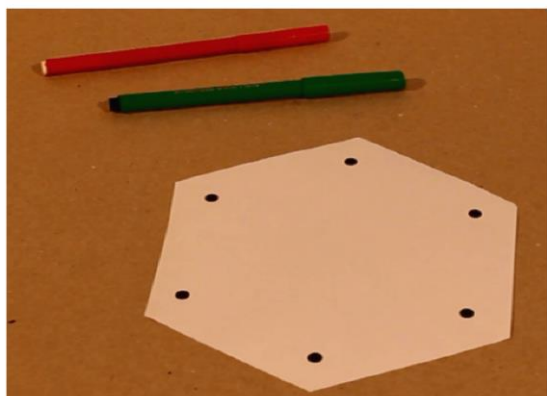
15. Komplexní úlohy

2. stupeň ZŠ

1. Hra SIM

Pomůcky

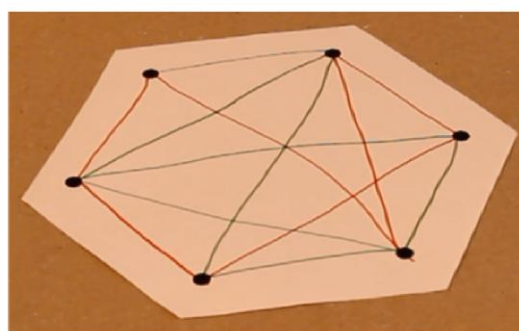
Autorská hra (G. J. Simmons), kterou lze hrát na papíře. Zakreslíme uzlové body – vrcholy pravidelného šestiúhelníku.



Pravidla:

Dva hráči se střídají v tahu, hrají různými barevnými tužkami (např. zelená – červená). Tah znamená: spoj dva dosud nespojené uzlové body svojí barvou. Ten, kdo první vytvoří jednobarevný uzlový trojúhelník, prohrává.

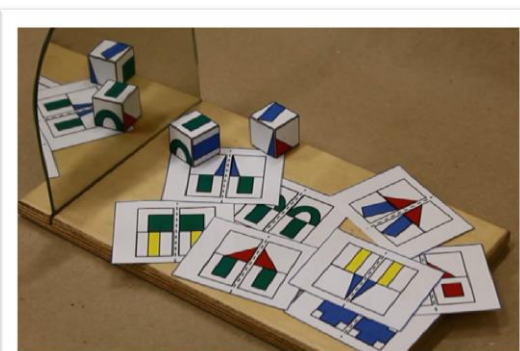
Hráči se navzájem kontrolují a hlídají okamžik, kdy jeden z nich prohrál. V ideálním případě (velká vyspělost hráčů) nastane situace, kdy hráči postupně zakreslí všech 15 spojníc uzlových bodů.



Aktivita

Hráči postupně střídavě spojují uzlové body a dodržují pravidla hry. Hra má pro 6 vrcholů lichý počet možných tahů (existuje 15 spojníc), proto nemůže nastat remíza, což je výhodné. Doporučujeme hrát dvě partie, aby se vystřídal hráči v začínající pozici.

2. Zrcadlení



Pomůcky

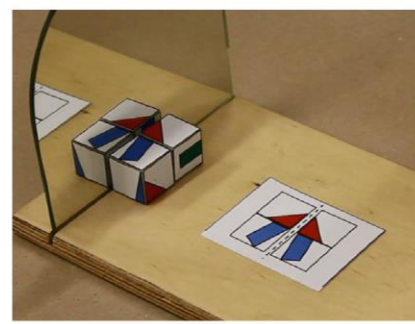
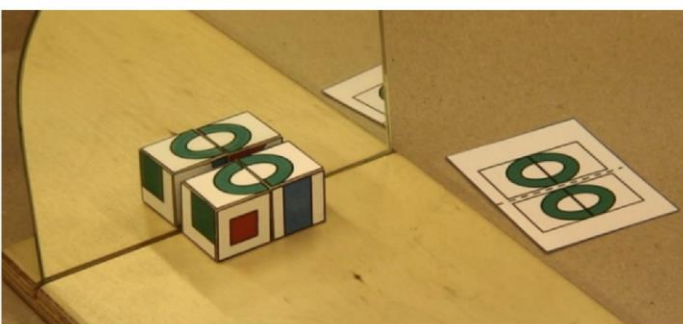
Dvě krychle s geometrickými motivy na jednotlivých stěnách, podložka se zrcátkem, kartičky s předlohou osově souměrných geometrických motivů.

Aktivita

Žák si vybere předlohu a hledá na krychlích vhodný geometrický motiv tak, aby pomocí zrcátka sestavil obrázek, který vidí na předloze. Žák krychli otáčí, zkoumá, analyzuje, předvídá, odhaduje.

V zrcadle se objeví celistvý obraz, který je na předloze. Žák kontroluje úplnost a správnost.

Aktivně poznává vlastnosti a zákonitosti zobrazení. Respektujeme způsob řešení i tempo žáka.



Aktivita rozvíjí vnímání souměrností, a to v rovině i prostoru (osovou a rovinnou souměrnost).

Přesahy na střední školu

Videozáznamy, které vznikly v projektu *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost*, umožní efektivněji rozvíjet matematickou gramotnost žáků základních škol. Řada z třiceti vybraných nahrávek však může posloužit i učitelům středních škol. Pro inspiraci uvádíme několik příkladů:

11. Tělesa 1. stupeň

Domek

Žáci středních škol mohou vytvořit modely těles tak, aby se z nich daly domky sestavovat (zakreslit síť a poté slepit modely). Mohou též vytvářet plánky staveb (půdorysy, nárysy...).

12. Rotační tělesa 1. stupeň

Vytváření rotačních těles

Žáci tímto experimentem reálně zjišťují vznik rotačních těles, intuitivně vnímají souvislost mezi osou, řezem tělesa a samotným tělesem.

13. Orientace v prostoru 2. stupeň

Řezy krychle

Doporučujeme, aby žáci experimentovali předtím, než řezy řeší konstrukčně.

14. Kombinatorika 2. stupeň

Pravděpodobnost

Žáci mohou sestavovat další jednoduchá zadání a z paměti je řešit. Jedná se o důležitou propedeutiku pravděpodobnosti.

15. Komplexní aktivity 2. stupeň

Hra SIM

Hru lze využít jako motivační při výuce kombinatoriky na střední škole.

Zrcadlení

Na střední škole mohou žáci pomůcku sami vytvořit a kreativně navrhnout další osově souměrné geometrické motivy a odpovídající předlohy. Lze využít zpracování na počítači.